

1. Зоря, планета та космічний корабель.

Розв'язання

Нехай R – радіус орбіти, $d1$ – відстань між Землею і зорею, $d2$ – відстань між кораблем і зорею на момент вимірювання π_2 , M_s – маса зорі, m – маса планети. Тоді:

$$\pi_1 = \frac{R}{d_1}; \pi_2 = \frac{R}{d_2}; \Delta d = d_1 - d_2.$$

Звідси:

$$R = \frac{\pi_1 \pi_2 \Delta d}{\pi_2 - \pi_1};$$

$$V = \frac{2\pi R}{T};$$

$$m \frac{V^2}{R} = G \frac{m M_s}{R^2} \rightarrow M_s = \frac{V^2 R}{G};$$

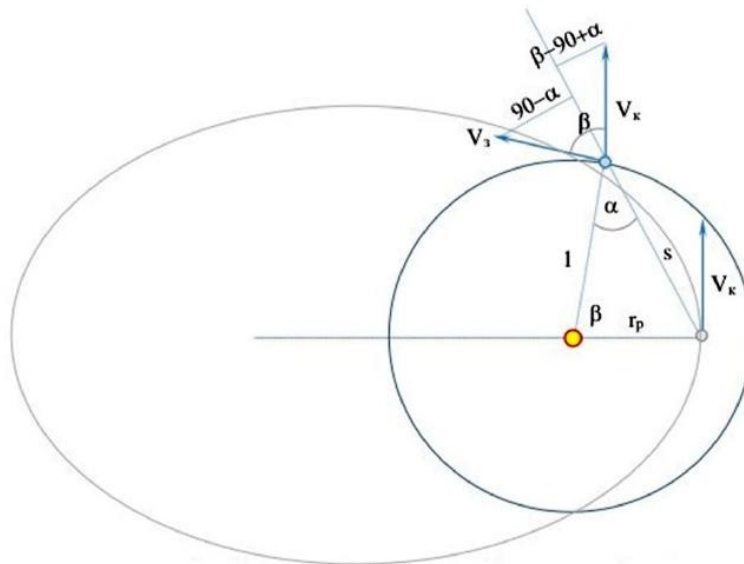
$$M_s = \frac{4\pi^2}{GT^2} \cdot \frac{(\pi_1\pi_2\Delta d)^3}{(\pi_2 - \pi_1)^3}.$$

2. Комета

Розв'язання

$$\text{a) } r_p = a(1 - e), \quad r_p = 17,2045(1 - 0,9546) = 0,7811 \text{ a.o.};$$

6)



За теоремою косинусів:

$$r_p^2 = s^2 + 1^2 - 2s \cos \alpha,$$

$$s^2 - 2s \cos \alpha + 1^2 - r_p^2 = 0, \quad s^2 - 1,8544 s + 0,3899 = 0,$$

$$D = 1,879, \quad s_{1,2} = \frac{1,8544 \pm \sqrt{1,879}}{2}, \quad s_1 = 1,613 \text{ а.о.}$$

Корінь $s_2 = 0,242 \text{ а.о.}$ не відповідає умові мінімальної відстані;

в) швидкість комети у перигелії:

$$V = \sqrt{GM_{\odot} \left(\frac{2}{r_p} - \frac{1}{a} \right)}, \quad V = 47,1 \text{ км/с.}$$

Оскільки Земля в афелії на початку липня, у перигелії – на початку січня, вважаємо, що у квітні відстань від Землі до Сонця 1 а.о. Швидкість Землі:

$$V_3 = \sqrt{\frac{GM_{\odot}}{1 \text{ а.о.}}} = 29,8 \text{ км/с.}$$

$$\cos\beta = \frac{r_p^2 + 1^2 - s^2}{2r_p} = -0,634, \quad \beta = 129,3^\circ.$$

$$V_k = 47,1 \text{ км/с}, \quad V_3 = 29,8 \text{ км/с.}$$

$$V_{\text{відн}}^2 = V_3^2 + V_k^2 - 2V_3 V_k \cos\beta, \quad V_{\text{відн}} = 69,9 \text{ км/с.}$$

$$V_{rk} = V_k \cos(\beta + \alpha - 90^\circ) = 22,6 \text{ км/с.}$$

$$V_{r3} = V_3 \cos(90^\circ - \alpha) = 11,2 \text{ км/с}, \quad V_{r \text{ відн}} = V_{rk} - V_{r3} = 11,4 \text{ км/с.}$$

$$V_{tk} = V_k \sin(\beta + \alpha - 90^\circ) = 41,3 \text{ км/с,}$$

$$V_{t3} = V_3 \sin(90^\circ - \alpha) = 27,6 \text{ км/с}, \quad V_{t \text{ відн}} = V_{tk} + V_{t3} = 68,9 \text{ км/с.}$$

Наступний перигелій відбудеться орієнтовно 30–31 серпня 2095 року.

$$\text{г) } T = a^{3/2}, \quad T = 17,2045^{3/2} = 71,361 \text{ року} = 71 \text{ рік } 132 \text{ доби.}$$

$$21 \text{ квітня} + 132 \text{ доби} = 31 \text{ серпня}, \quad T_{01} = 21.04.2024 + 71 \text{ рік } 132 \text{ доби} = 31.08.2095.$$

3. Обертання Землі.

Розв'язання

Варіант 1.

а) Оскільки за умовою задачі Земля обертається у зворотному напрямку, то кутову частоту наступності сонячних діб визначаємо як різницю частот:

$$\omega_S = -\omega_{\text{ос}} - \omega_{\text{орб}},$$

де $\omega_{\text{ос}}$ – частота осьового обертання планети; $\omega_{\text{орб}}$ – частота її орбітального руху. Оскільки $\omega = 2\pi/T$, то після нескладних перетворень отримаємо:

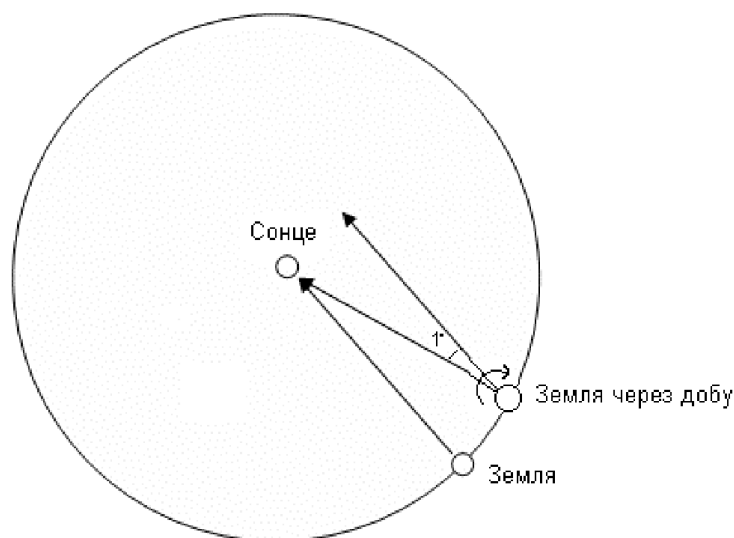
$$T_S = -T_{\text{ос}} \cdot T_{\text{орб}} / (T_{\text{орб}} + T_{\text{ос}}) = -23 \text{ год } 52 \text{ хв } 08 \text{ с}$$

Сонячна доба була б коротша, ніж зараз, а знак мінус означає, що Сонце на небі Землі пересуватиметься у цьому разі у протилежному напрямку: сходити на заході та заходити на сході.

б) Кількість сонячних діб у тропічному році:

$$T_{\text{троп}} / T_{\text{S}} = 367,25 \text{ діб.}$$

Варіант 2.



а) Нехай зараз відбувається кульмінація Сонця. Якщо Земля буде обертатися в протилежному напрямку, то для того, щоб Сонце знову кульмінувало, Землі потрібно повернутися на $360^\circ/365 \approx 1^\circ$ менше, ніж повний оберт. Поворот на 1° займає у Землі приблизно $24 \text{ год}/360^\circ = 4 \text{ хвилини}$. Тобто сонячна доба буде МЕНШЕ періоду обертання (який як і зараз дорівнює 23 год 56 хв) на 4 хвилини, тобто становить 23 год 52 хв.

б) Зараз у році 366,25 зоряних діб (періодів обертання навколо осі). За рік Земля «зекономить» час в 1 сонячну добу за рахунок обертання навколо Сонця, тобто тепер встигне пройти 367,25 сонячних діб.

ПРАКТИЧНИЙ ТУР

1. Світло та тінь

Розв'язання

1. Проводимо термінатор на Місяці. Напрямок на Сонце є перпендикулярним до нього. Визначаємо кут між горизонталлю та напрямком на Сонце (наприклад, за тангенсом $9/130$). Отримуємо кут близько 4 градусів.

2. Фаза – перша чверть. Місяць росте, тобто «молодий».

3. На фото (рис. 1) видно такі моря: Криз (Crisium), Достатку (Fecunditatis), Нектару (Nectaris), Спокою (Tranquillitatis), Ясності (Serenitatis).

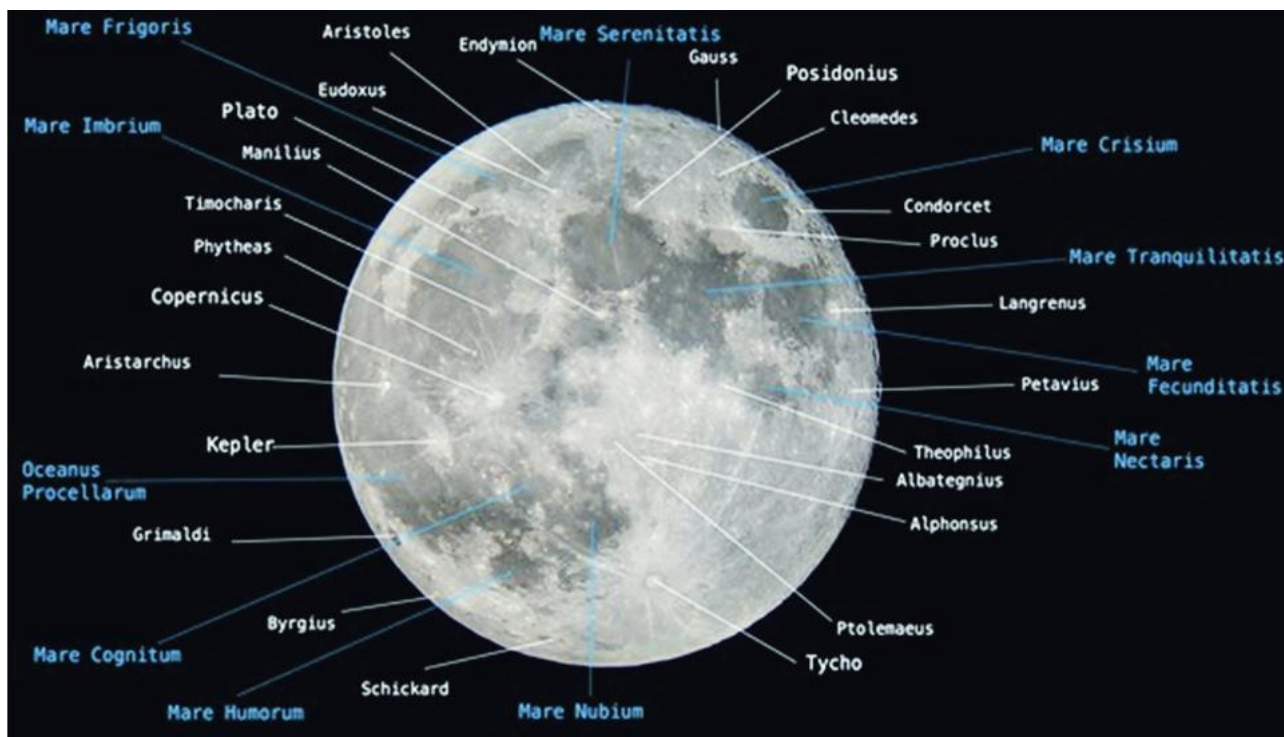


Рис. 1.

4. Знаючи, що діаметр Місяця 0,5 градуса, вимірюємо, що центр Місяця перебуває на висоті приблизно 1 градус над верхівкою гори.

5. Виходячи з висоти Сонця, воно може бути на сході або на заході. Але Місяць, що росте, у фазі першої чверті, ми бачимо високо саме на заході Сонця (див. рис. 2, де червона точка – спостерігач, фази Місяця позначено схематично, всі обертання зображено в одній площині. У разі розташування спостерігача у протилежній точці на поверхні Землі, він побачить над головою Місяць, що старіє, і це буде зранку, згідно з обертанням Землі). Тому праворуч – захід, прямо – південь, ліворуч – схід.

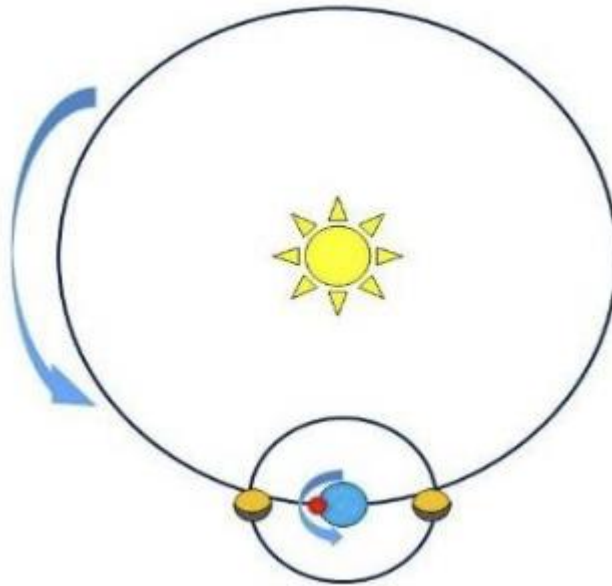


Рис. 2

6. «Молодий» Місяць у фазі першої чверті можна побачити високо над горизонтом (на відміну від Сонця він високо, аж над горою) ввечері, близько 18 години. Це спричинено різницею екліптичної довготи Місяця та Сонця в цій фазі близько 6 годин (див. рис. 2). Сонце при цьому майже сіло (спостерігач – червона крапка на рисунку, напрямок осьового обертання Землі показано синьою стрілкою). А ми знаємо, що Сонце сідає близько 18 години у наближенні до рівнодення дні. Отже, це вечір близько весняного або осіннього рівнодення.

2. Визначення висоти гори на Місяці за її тінню

Розв'язок

- схема

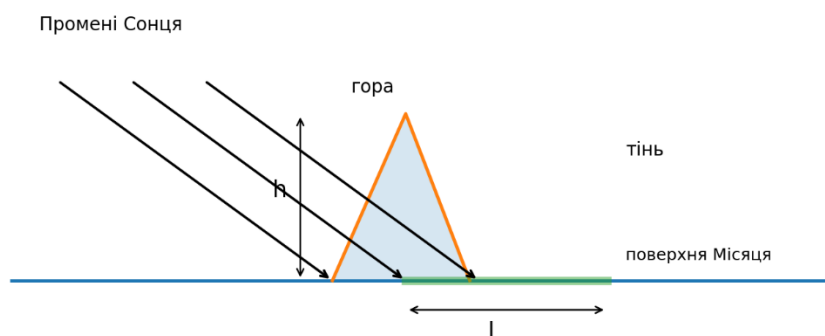


Рисунок 1. Схема освітлення гори на поверхні Місяця (не в масштабі).

- Формула

Розглянемо прямокутний трикутник, утворений висотою гори h , довжиною її тіні l та сонячним променем. Кут між променем і горизонтальною поверхнею дорівнює α .

$$\tan \alpha = h / l$$

Звідси:

$$h = l \cdot \tan \alpha$$

- Підставляємо значення:

$$h = 16 \cdot \tan 7^\circ \approx 1,96 \text{ км}$$

Відповідь

Висота гори на Місяці приблизно дорівнює 1,96 км.

Важливо: довжина тіні 16 км і кут 7° — це навчальні дані умови, а не підтверджені вимірювання NASA за фотографією.

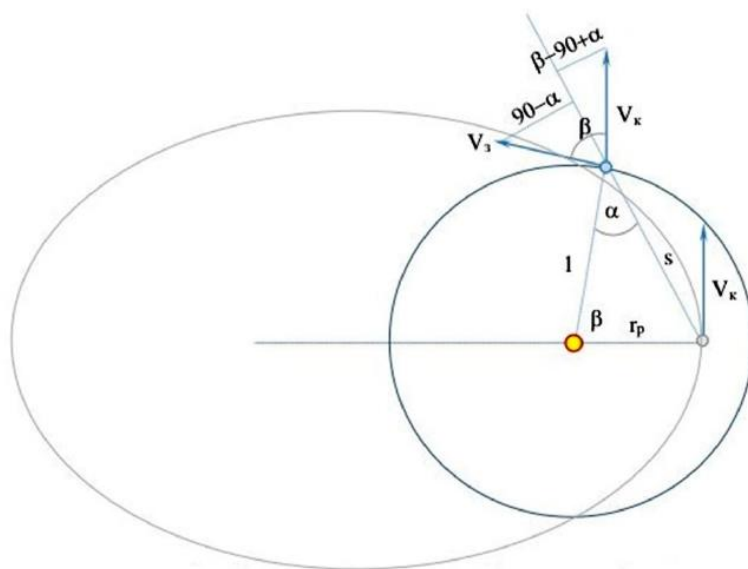
ТЕОРЕТИЧНИЙ ТУР

1. Комета

Розв'язання

а) $r_p = a(1 - e), r_p = 17,2045(1 - 0,9546) = 0,7811 \text{ а. о.};$

б)



За теоремою косинусів:

$$r_p^2 = s^2 + 1^2 - 2s \cos \alpha,$$

$$s^2 - 2s \cos \alpha + 1^2 - r_p^2 = 0, s^2 - 1,8544s + 0,3899 = 0,$$

$$D = 1,879, s_{1,2} = \frac{1,8544 \pm \sqrt{1,879}}{2}, s_1 = 1,613 \text{ а. о.}$$

Корінь $s_2 = 0,242 \text{ а. о.}$ не відповідає умові мінімальної відстані;

в) швидкість комети у перигелії:

$$V = \sqrt{GM_{\odot} \left(\frac{2}{r_p} - \frac{1}{a} \right)}, V = 47,1 \text{ км/с.}$$

Оскільки Земля в афелії на початку липня, у перигелії – на початку січня, вважаємо, що у квітні відстань від Землі до Сонця 1 а.о. Швидкість Землі:

$$V_3 = \sqrt{\frac{GM_{\odot}}{1 \text{ а. о.}}} = 29,8 \text{ км/с.}$$

$$\cos \beta = \frac{r_p^2 + 1^2 - s^2}{2r_p} = -0,634, \beta = 129,3^\circ.$$

$$V_K = 47,1 \text{ км/с}, V_3 = 29,8 \text{ км/с}.$$

$$V_{\text{відн}}^2 = V_3^2 + V_K^2 - 2V_3V_K\cos\beta, V_{\text{відн}} = 69,9 \text{ км/с}.$$

$$V_{rK} = V_K\cos(\beta + \alpha - 90^\circ) = 22,6 \text{ км/с}.$$

$$V_{r3} = V_3\cos(90^\circ - \alpha) = 11,2 \text{ км/с}, V_{r\text{відн}} = V_{rK} - V_{r3} = 11,4 \text{ км/с}.$$

$$V_{tK} = V_K\sin(\beta + \alpha - 90^\circ) = 41,3 \text{ км/с},$$

$$V_{t3} = V_3\sin(90^\circ - \alpha) = 27,6 \text{ км/с}, V_{t\text{відн}} = V_{tK} + V_{t3} = 68,9 \text{ км/с}.$$

Наступний перигелій відбудеться орієнтовно 30–31 серпня 2095 року.

$$r) T = a^{3/2}, T = 17,2045^{3/2} = 71,361 \text{ року} = 71 \text{ рік } 132 \text{ доби}.$$

$$21 \text{ квітня} + 132 \text{ доби} = 31 \text{ серпня}, T_{01} = 21.04.2024 + 71 \text{ рік } 132 \text{ доби} = 31.08.2095.$$

2. Подвійна зоря

Розв'язання

Відстань до подвійної зорі:

$$r = 1/\pi = 1/0,168 = 5,952 \text{ пк} = 19,4 \text{ св. р.}$$

R_a — радіус більшої компоненти А, T_a — температура її фотосфери; R_β — радіус меншої компоненти В, T_β — її температура.

У максимумі блиску спостерігаємо обидві компоненти, під час первинного мінімуму менша компонента проходить перед більшою, а під час вторинного мінімуму видно лише більшу компоненту. З урахуванням законів Погсона та Стефана—Больцмана:

$$E_{\max} / E_{\min 1} = (R_a^2 T_a^4 + R_\beta^2 T_\beta^4) / ((R_a^2 - R_\beta^2) T_a^4 + R_\beta^2 T_\beta^4) = 2,512^{\Delta m_1} = 2,512^{0,544} = 1,6505.$$

$$E_{\max} / E_{\min 2} = (R_a^2 T_a^4 + R_\beta^2 T_\beta^4) / (R_a^2 T_a^4) = 1 + (R_\beta / R_a)^2 (T_\beta / T_a)^4 = 2,512^{\Delta m_2} = 2,512^{0,086} = 1,0824.$$

Із цих рівнянь отримуємо:

$$R_\beta / R_a \approx 0,6531; \quad T_\beta / T_a \approx 0,6629.$$

$$\text{Тоді } R_\beta \approx 0,66 R_\odot, \quad T_\beta \approx 4035 \text{ К}.$$

3. Планетна система TOI-715

Розв'язання

1. Щоб тепловий режим на планеті залишався незмінним, потік енергії від зорі на відстані l має бути таким самим:

$$F = L / (4\pi l^2) = (4\pi \sigma R^2 T^4) / (4\pi l^2) = \sigma R^2 T^4 / l^2.$$

Для збереження середньої температури у формулі замінюємо відстань l великою піввіссю a . Тоді:

$$(R_c^2 T_c^4) / (a_c^2) = (R^2 T^4) / (a^2) \quad \square \quad a = a_c (R T^2) / (R_c T_c^2) = 0,068 \text{ а. о.}$$

Отже, параметри орбіти планети: $a = 0,068 \text{ а. о.}$, ексцентриситет $e = 0,0167$.

2. Тривалість року знаходимо з III закону Кеплера, виражаючи велику піввісь в астрономічних одиницях, а масу — в масах Сонця:

$$t = \sqrt{(a^3 / M)} = \sqrt{(0,068^3 / 0,225)} = 0,037 \text{ року} = 13,5 \text{ доби}.$$

3. Якщо зоря випромінює ізотропно, а планета перебуває далеко від неї, поглинена планетою потужність дорівнює:

$$P_{\text{погл}} = L\pi r^2(1 - \alpha)/(4\pi D^2) = \pi R^2\sigma T^4 r^2(1 - \alpha)/D^2,$$

де α — альбедо планети, r — її радіус, D — відстань від планети до зорі.

Вважаємо, що планета має однакову температуру $T_{\text{пл}}$ по всій поверхні та випромінює як чорне тіло. Тоді:

$$P_{\text{випр}} = 4\pi r^2\sigma T_{\text{пл}}^4.$$

Прирівнюючи поглинену та випромінену потужності, отримуємо межі зони, придатної для життя:

$$D = (T^2 R / (2T_{\text{пл}}^2))\sqrt{(1 - \alpha)}.$$

Внутрішня межа відповідає температурі кипіння води $T_k = 373$ К, зовнішня — температурі замерзання води $T_z = 273$ К. Для TOI-715: $T = 3074$ К, $R = 0,24 R_{\odot}$, $\alpha = 0,37$.

$$D_{\text{min}} = (T^2 R / (2T_k^2))\sqrt{(1 - \alpha)} = 0,03 \text{ а. о.}$$

$$D_{\text{max}} = (T^2 R / (2T_z^2))\sqrt{(1 - \alpha)} = 0,056 \text{ а. о.}$$

Під час визначення інтервалу зони, придатної для життя, слід враховувати й інші фактори, зокрема вплив додаткових парникових газів, таких як CH_4 і H_2 . Їх наявність може зробити цю зону дещо ширшою, ніж передбачає класичне визначення.

ПРАКТИЧНИЙ ТУР

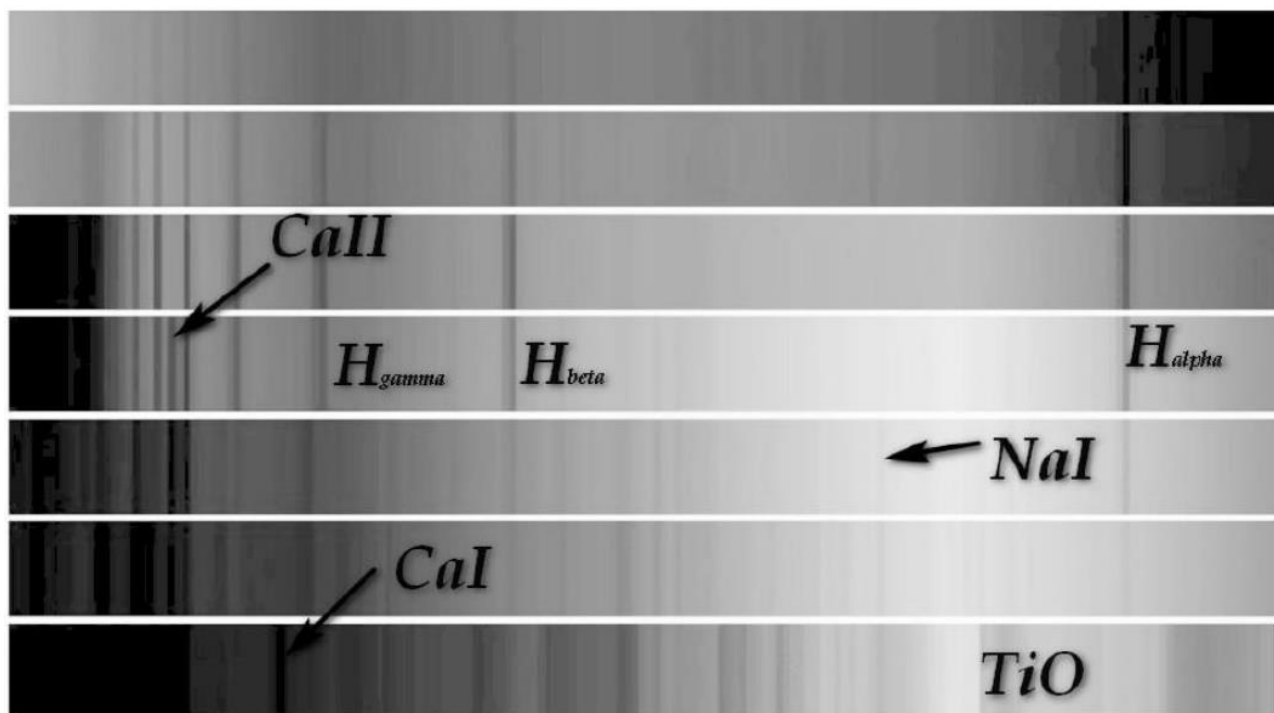
1. Спектральна плутанина

Розв'язання

1. Серію Бальмера легко побачити на спектрі номер 1 та 7. Першу лінію серії Бальмера, H_α (6562 Å), легко знайти у правій області спектра (з червоної сторони). Наступні лінії на спектрі номер 1 та 7 будуть відповідно H_β , H_γ і так далі.

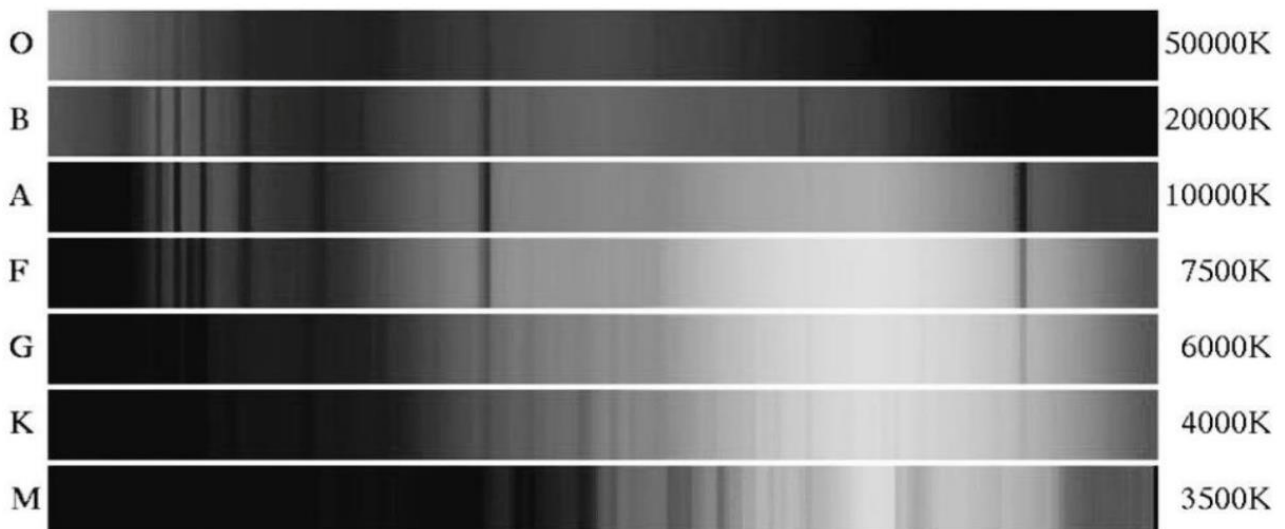
2. Щоб визначити діапазон довжин хвиль наданого спектра, скористаймось ототожненими лініями серії Бальмера. Різниця довжин хвиль між сусідніми лініями серії Бальмера H_α (6562 Å) і H_β (4861 Å) становить 1701 Å. За допомогою лінійки оцінимо масштаб зображення (тобто скільки ангстремів вміщується в міліметрі). Відраховуючи від відомих ліній, отримаємо, що синій край на довжині хвилі 3500 Å, а червоний – на довжині хвилі 7500 Å.

3.



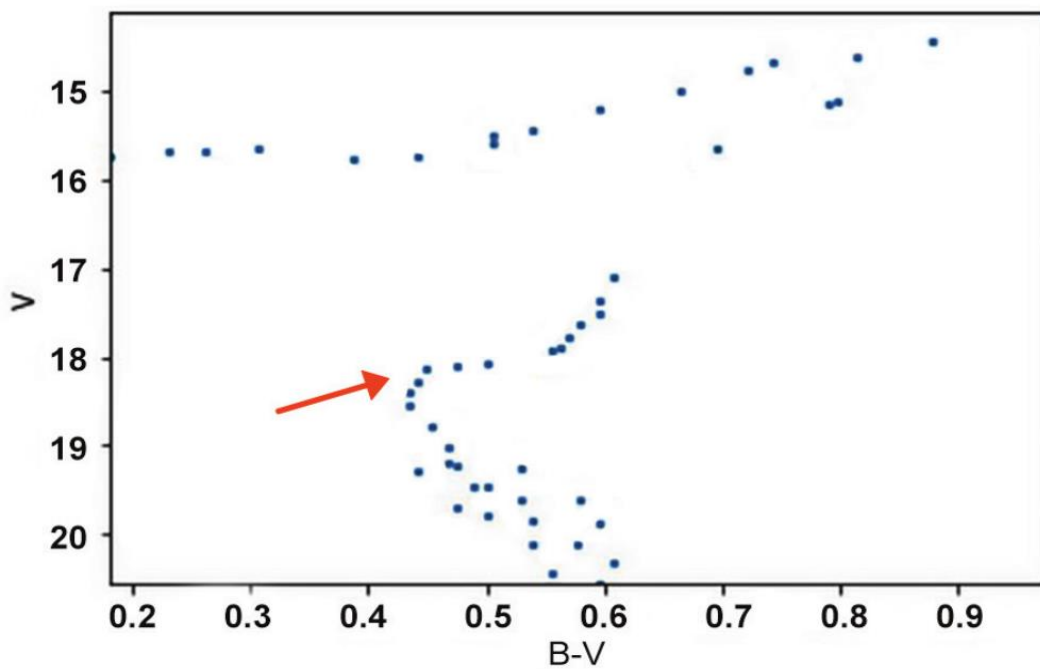
4. Спектральні класи йдуть у порядку зменшення температур наступним чином: OBAFGKM. Відповідно O – 50 000 K, B – 20 000 K, A – 10 000 K, F – 7500 K, G – 6000 K, K – 4000 K, M – 3500 K.

Зіставляючи спектри з описами для різних спектральних класів, визначаємо відповідність між спектрами та класами: 1 – A, 2 – K, 3 – O, 4 – G, 5 – M, 6 – F, 7 – B.



2. Вік кулястого скупчення

Розв'язання



Червоною стрілкою показано точку повороту, якій відповідає:

$B - V = 0,45$ (можливі варіанти: 0,435; 0,442; 0,449; 0,453).

У таблиці бачимо, що це наближено відповідає класу F5.

Абсолютна зоряна величина – 3,5.

Приблизний вік – 4×10^9 років.

Видима зоряна величина – 18,5mm .

Отримуємо наближену відстань:

$M = m + 5 - 5\lg(r) \Rightarrow r = 10^{0,2(m+5-M)} = 10$ кпк.