

Загальна кількість балів 30.

Правильна відповідь на завдання 10.1, 11,1. - один бал. Задача - п'ять балів.

Розв'язання задач.

10.1

1.1. Юпітер, Сатурн, Нептун, Уран, Земля

1.2. б) Зменшиться приблизно в $\sqrt{2}$ рази (орбітальна швидкість $v = \sqrt{GM/r}$)

1.3. г) Фобос - зайве

Супутники Юпітера: Іо; Європа; Ганімед; Калісто

Супутник Марса: Фобос.

1.4. 1 — б; 2 — г; 3 — а; 4 — в Правильна відповідь Ліра

1.5. а) ні; б) так; в) так; г) так; д) ні

10.2. Щоб створити прискорення $g=9,81 \text{ м/с}^2$ на зовнішньому радіусі $R=100 \text{ м}$ тороїд має обертатися з кутовою швидкістю

$$\omega = \sqrt{g/R} = \sqrt{9,81/100} \text{ рад/с} = 0,3134 \text{ рад/с.}$$

Лінійна швидкість (на ободі):

$$v = \omega R \approx 0,3134 \cdot 100 \text{ м/с.} \approx 31,34 \text{ м/с.}$$

Період обертання:

$$T = 2\pi/\omega \approx 2\pi/0,3134 \approx 20.05 \text{ с.}$$

Частота в обертах на хвилину:

$$n = \omega/2\pi \cdot 60 \approx 2,99 \text{ об/хв.}$$

10.3. Швидкість об'єкта на цій орбіті

$$v \approx \sqrt{GM/(R + h)},$$

де M – маса Землі, R – радіус Землі, h – висота орбіти, G — гравітаційна стала

$$v \approx 7,79 \cdot 10^3 \text{ м/с.}$$

Визначаємо коефіцієнт k : $k = F_o \cdot v = 467,4 \text{ Дж/с}$

Кінетична енергія $K = mv^2/2$, $K = 1,515 \cdot 10^7 \text{ Дж}$

Потенціальна енергія $U = -GMm/(R+h)$. $U = -3,03 \cdot 10^7 \text{ Дж}$

Повна орбітальна енергія об'єкта: $E = K + U = -1,515 \cdot 10^7 \text{ Дж}$

Оцінка часу життя - $t = E/k$, $t = 3,24 \cdot 10^4 \text{ с} = 9 \text{ год.}$

G — універсальна гравітаційна стала $= 6,674 \cdot 10^{-11} \text{ Нм}^2/\text{кг}^2$;

R - радіус Землі $R = 6,371 \cdot 10^6 \text{ м}$

10.4.

Радіус орбіти кожної зорі від барицентру: $R=L/2$.

Кутова швидкість: $\omega=2\pi/T$.

Сила гравітаційного тяжіння між зорями: $F_G=Gm^2/L^2$

Ця сила забезпечує доцентрове прискорення однієї зорі при круговому русі: $m\omega^2 R=F_G$.

Підставимо $R=L/2$ і скоротимо на m :

$$\omega^2 L/2 = Gm/L^2 \Rightarrow m = \omega^2 L^3 / (2G)$$

Підставляючи $\omega=2\pi/T$

$$\text{Отримаємо: } m = 2\pi^2 L^3 / (G T^2)$$

10.5.

Нехай R – радіус орбіти, d_1 – відстань між Землею і зорею, d_2 – відстань між кораблем і зорею на момент вимірювання π_2 , M_s – маса зорі, m – маса планети.

Якщо π_1, π_2 малі (та вказані кутові відстані дані в радіанах), можна покласти $\sin \pi \approx \pi$.

$$\text{Тоді: } \pi_1 = R/d_1 ; \pi_2 = R/d_2 ; \Delta d = d_1 - d_2.$$

Звідси:

$$\begin{aligned} R &= \frac{\pi_1 \pi_2 \Delta d}{\pi_2 - \pi_1}; \\ V &= \frac{2\pi R}{T}; \\ m \frac{V^2}{R} &= G \frac{m M_s}{R^2} \rightarrow M_s = \frac{v^2 R}{G}; \\ M_s &= \frac{4\pi^2 (\pi_1 \pi_2 \Delta d)^3}{G T^2 (\pi_2 - \pi_1)^3}. \end{aligned}$$

Відповідь:
$$M_s = \frac{4\pi^2 (\pi_1 \pi_2 \Delta d)^3}{G T^2 (\pi_2 - \pi_1)^3}.$$

10.6. Втрату маси за рахунок електромагнітного випромінювання розраховуємо виходячи з Ейнштейнкової формули $E=mc^2$:

$$\Delta m = L/c^2 = 4 \cdot 10^{26} \text{ Вт} / 9 \cdot 10^{16} \text{ м}^2/\text{с}^2 = 4,4 \cdot 10^9 \text{ кг/с},$$

в той час як частки сонячного вітру зменшують масу зі швидкістю:

$$\Delta m' = 4\pi R^2 f m = 4 \cdot 3,14 \cdot 2,25 \cdot 10^{22} \text{ м}^2 \cdot 4 \cdot 10^{12} \text{ м}^{-2} \text{ с}^{-1} \cdot 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ кг} = 2 \cdot 10^9 \text{ кг/с},$$

де R - велика піввісь (радіус) орбіти Землі, а m - маса протона .

Таким чином ми бачимо, що втрата маси Сонця за рахунок випромінювання приблизно вдвічі більша, ніж за рахунок сонячного вітру

Загальна кількість балів 30.

Правильна відповідь на завдання 10.1, 11.1. - один бал. Задача - п'ять балів.

Розв'язання задач.

11.1

1.1. Юпітер, Сатурн, Уран, Земля, Венера, Марс

1.2. б) Зменшиться приблизно в $\sqrt{2}$ рази (орбітольна швидкість $v = \sqrt{GM/r}$)

1.3. г) Деймос - зайве

Супутники Юпітера: Іо; Європа; Ганімед; Калісто

Супутник Марса: Деймос.

1.4. 1 — д; 2 — б; 3 — в; 4 — а

1.5. а) так; б) ні; в) так; г) ні; д) так

11.2. Щоб створити прискорення $g=9,81 \text{ м/с}^2$ на зовнішньому радіусі $R=100 \text{ м}$ тороїд має обертатися з кутовою швидкістю

$$\omega = \sqrt{g/R} = \sqrt{9,81/100} \text{ рад/с} = 0,3134 \text{ рад/с.}$$

Лінійна швидкість (на ободі):

$$v = \omega R \approx 0,3134 \cdot 100 \text{ м/с.} \approx 31,34 \text{ м/с.}$$

Період обертання:

$$T = 2\pi/\omega \approx 2\pi/0,3134 \approx 20,05 \text{ с.}$$

Частота в обертах на хвилину:

$$n = \omega/2\pi \cdot 60 \approx 2,99 \text{ об/хв.}$$

11.3. Швидкість об'єкта на цій орбіті

$$v \approx \sqrt{GM/(R + h)},$$

де M – маса Землі, R – радіус Землі, h – висота орбіти, G — гравітаційна стала

$$v \approx 7,79 \cdot 10^3 \text{ м/с.}$$

Визначаємо коефіцієнт k : $k = F_o \cdot v = 467,4 \text{ Дж/с}$

Кінетична енергія $K = mv^2/2$, $K = 3,034 \cdot 10^7 \text{ Дж}$

Потенціальна енергія $U = -GMm/(R+h)$. $U = -6,06 \cdot 10^7 \text{ Дж}$

Повна орбітальна енергія об'єкта: $E = K + U = -3,026 \cdot 10^7 \text{ Дж}$

Оцінка часу життя - $t=E/k$, $t=6,47 \cdot 10^4 \text{ с} \approx 18 \text{ год.}$

G — універсальна гравітаційна стала $= 6,674 \cdot 10^{-11} \text{ Нм}^2/\text{кг}^2$;

R - радіус Землі $= 6,371 \cdot 10^6 \text{ м}$

11.4.

Радіус орбіти кожної зорі від барицентру: $R=L/2$.

Кутова швидкість: $\omega=2\pi/T$.

Сила гравітаційного тяжіння між зорями: $F_G=Gm^2/L^2$

Ця сила забезпечує доцентрове прискорення однієї зорі при круговому русі: $m\omega^2 R=F_G$.

Підставимо $R=L/2$ і скоротимо на m :

$$\omega^2 L/2 = Gm/L^2 \Rightarrow m = \omega^2 L^3 / (2G)$$

Підставляючи $\omega=2\pi/T$

Отримаємо: $m=2\pi^2 L^3 / (G T^2)$

11.5.

Розрахуємо повну швидкість комети, змінивши розмірність (градуси на добу на км/с тангенціальної швидкості):

Тангенціальна швидкість $v_t = r(d\lambda/dt) = 4,5 \text{ км/с.}$

Повна швидкість
$$v = \sqrt{\left(\frac{\Delta\lambda \times r \times \pi \times 150 \times 10^6}{180 \times 24 \times 3600}\right)^2 + v_r^2} = 16,5 \text{ км/с}$$

Обчислимо велику піввісь з співвідношення для енергії :

$$v^2 = GM_{\odot} \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right), a = 10,5 \text{ а. о.}$$

Велика піввісь вийшла додатною, отже, орбіта еліптична, а комета періодична.

Період обертання знаходимо з третього закону Кеплера:

$$T \approx a^{3/2},$$

Отже : $T=34$ роки.

11.6. При обертанні тіла точка на його екваторі не може рухатись швидше за першу космічну швидкість цього тіла.

Вважаючи тіло кулею радіусу R та густини ρ , отримуємо:

$$v = \frac{2\pi R}{T} < \sqrt{\frac{GM}{R}} = \sqrt{\frac{4\pi G \rho R^2}{3}}, \text{ звідки } T > \sqrt{\frac{3\pi}{G\rho}}.$$

Оцінімо густину пульсару. Оскільки пульсар це нейтронна зоря, то будемо вважати, що основною складовою її є нейтрони, отже вона має ту ж густину, що й нейтрон:

$$\rho = \frac{3m}{4\pi r^3} = \frac{3 \cdot 1.7 \cdot 10^{-27}}{4 \cdot 3.14 \cdot 10^{-45}} \approx 4 \cdot 10^{17} \text{ кг/м}^3$$

Підставляючи значення, остаточно отримуємо $T_{\min} = 0,6 \text{ мс}$.