

дорівнює b_j .

Розв'язання. Наведемо приклад заповнення чисел в таку таблицю. Нехай

$$S = a_1 + a_2 + \dots + a_m = b_1 + b_2 + \dots + b_n,$$

та $s = a_m + b_n - S$. Заповнимо таблицю таким чином:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & & 0 & a_2 \\ & \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{m-1} \\ b_1 & b_2 & \dots & b_{n-1} & s \end{bmatrix}$$

Суми усіх рядків та стовпчиків окрім останніх умову задовольняють. Знайдемо суму чисел останнього рядка:

$$\begin{aligned} (b_1 + b_2 + \dots + b_{n-1}) + s &= (b_1 + b_2 + \dots + b_{n-1}) + a_m + b_n - S = \\ &= (b_1 + b_2 + \dots + b_n) + a_m - S = S + a_m - S = a_m. \end{aligned}$$

Аналогічно сума чисел в останньому стовпчику дорівнює b_n .

7–3.1. На колі розташовано 4 сині точки, 3 жовті, 2 червоні та 1 чорна точка. Скільки можна побудувати попарно різних трикутників, у яких дві вершини мають однаковий колір, а третя вершина – інший колір? Наприклад, попарно різних трикутників з усіма синіми вершинами є рівно 4.

Відповідь: 65.

Розв'язання. Якщо трикутник має 2 сині вершини, то їх можна вибрати 6 способами, третю вершину можна вибрати $3 + 2 + 1 = 6$ способами, тобто разом таких трикутників буде $6 \cdot 6 = 36$.

Якщо трикутник має 2 жовті вершини, то їх можна вибрати 3 способами, третю вершину можна вибрати $4 + 2 + 1 = 7$ способами, тобто разом таких трикутників буде $3 \cdot 7 = 21$.

Якщо трикутник має 2 червоні вершини, то їх можна вибрати одним способом, третю вершину можна вибрати $4 + 3 + 1 = 8$ способами, тобто разом таких трикутників буде $1 \cdot 8 = 8$.

Інших варіантів не існує, тому разом маємо $36 + 21 + 8 = 65$ таких трикутників.

7–4.1 Дарина зібрала букет, що містить білі та червоні троянди, білі та червоні гвоздики. Одна третина білих квітів – троянди, 75% червоних – гвоздики, 60% усіх квіток – білі. Скільки відсотків від усіх квітів становлять гвоздики?

Відповідь: 70.

Розв'язання. Нехай білих квітів буде $3a$, тоді там a троянд та $2a$ – гвоздики. Червоних квітів буде $4b$, з яких b – троянд та $3b$ – гвоздики. Крім того $4b : 3a = 2 : 3$ або $2b = a$. нам треба знайти відсоток гвоздик, тобто відношення $(2a + 3b) : (3a + 4b)$. Далі зробимо такі перетворення:

$$\frac{2a + 3b}{3a + 4b} = \frac{4b + 3b}{6b + 4b} = \frac{7b}{10b} = \frac{7}{10}.$$

Таким чином гвоздик є 70%.

8 клас

8–1. Для натурального числа n через $n!$ позначимо добуток $1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$. На скільки нулів закінчується вираз $\frac{2025!}{2000!}$?

Відповідь: 6.

Розв'язання. Кількість нулів наприкінці числа

$$\frac{2025!}{2000!} = 2001 \cdot 2002 \cdot \dots \cdot 2025$$

очевидно залежить від кількості множників 5 в його розкладі на прості множники. Порахуємо їх.

$$2005 = 5 \cdot 401, 2010 = 5 \cdot 402, 2015 = 5 \cdot 403, 2020 = 5 \cdot 404, 2025 = 5 \cdot 5 \cdot 81.$$

Таким чином шукана кількість цифр 0 наприкінці числа дорівнює 6.

8–2. У матері є 7 яблук, 6 груш та 5 апельсинів. Вона хоче розділити їх між двома дітьми так, щоб кожна дитина отримала по 9 фруктів. Скількома різними способами це можна зробити? Якщо якась дитина отримує різну кількість деякого з видів фруктів, то такий розподіл вважається різним.

Відповідь: 36.

Розв'язання. Першій дитині можна дати від 0 до 6 груш і від 0 до 5 апельсинів. Не враховуючи умову, що вона повинна отримати загалом 9 фруктів, існує загалом $7 \cdot 6 = 42$ можливості дати груші та апельсини. Можливості, коли перша дитина отримує більше 9 груш та апельсинів, а також ті, де перша дитина отримує менше 2 груш та апельсинів, не задовольняють умові. Порахуємо кількості цих випадків. Є 3 варіанти, коли загальна кількість груш та апельсинів більше 9: $6 + 4$, $5 + 5$ та $6 + 5$. Також є 3 варіанти, коли загальна кількість груш та апельсинів менше 2: $0 + 0$, $0 + 1$ та $1 + 0$. Таким чином, існує $42 - 3 - 3 = 36$ чинних можливостей.

8–3. Заданий квадрат $ABCD$ зі стороною 1. На сторонах AB та AD вибрані точки P та Q відповідно таким чином, що периметр $\triangle APQ$ дорівнює 2. Яке найбільше значення може приймати за таких умов величина $\angle PCQ$?

Відповідь: 45° .

Розв'язання. Побудуємо таку точку E на промені AD за точку D , щоб $CE = CP$, тоді $\triangle DCE = \triangle BCP$ (рис. 5). Звідси випливає, що

$$\angle ECP = \angle ECD + \angle DCP = \angle BCP + \angle DCP = 90^\circ.$$

Розглянемо відрізок

$$EQ = ED + DQ = BP + DQ = (1 - AP) + (1 - AQ) = 2 - AP - AQ = PQ.$$

Таким чином $\triangle QCE = \triangle QCP$ за трьома сторонами. Звідси випливає, що $\angle ECQ = \angle QCP$. Якщо врахувати, що $\angle ECQ + \angle QCP = \angle ECP = 90^\circ \Rightarrow \angle QCP = 45^\circ$.

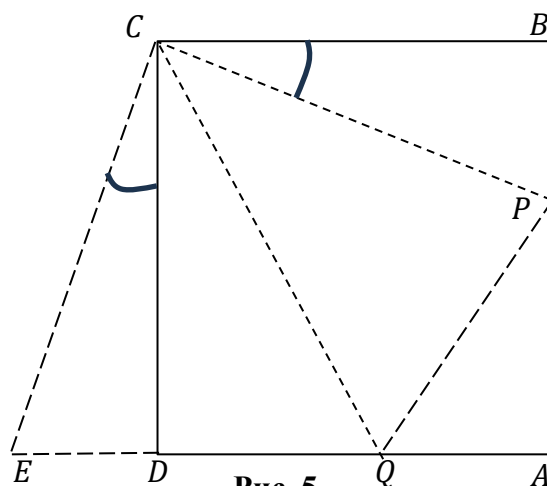


Рис. 5

8–4. Одночленом степені k назовемо вираз ax^k , де a, k – цілі ненульові числа. Тричленом назовемо суму трьох одночленів різних степенів. Яку найменшу кількість доданків у вигляді одночленів різних степенів може містити добуток двох тричленів, якщо кожний з шести одночленів, що їх утворюють, мають попарно різні степені?

Відповідь: 2.

Розв'язання. Зрозуміло, що менше двох доданків такий добуток містити не може, бо добуток двох старших одночленів та двох молодших – скоротитися не можуть. покажемо, що рівно 2 такий добуток містити може. почнемо з простої рівності, де тричлени мають одночлени однакового степені, а далі отримаємо шуканий добуток:

$$x^4 + 4 = x^4 + 4x^2 + 4 - 4x^2 = (x^2 + 2)^2 - 4x^2 = (x^2 - 2x + 2)(x^2 + 2x + 2) \Rightarrow x^7 + 4x^3 = x^3(x^2 - 2x + 2)(x^2 + 2x + 2) = (x^5 - 2x^4 + 2x^3)(x^2 + 2x + 2).$$

8–3.1. У рівнобедреному трикутнику ABC $\angle ABC = 120^\circ$. На стороні AC відмічена така точка M , що $MC = 2AM$. Знайдіть градусну міру $\angle MBC$.

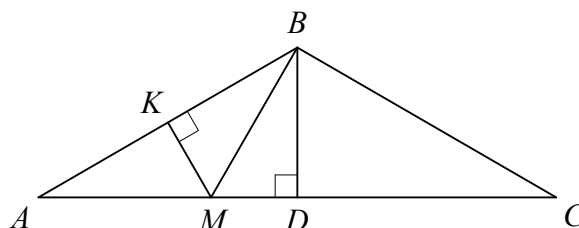


Рис. 6

Відповідь: 90° .

Розв'язання. Проведемо $BD \perp AC$ та $BM \perp AB$ (рис. 6). Нехай $AM = x$, тоді

$MK = \frac{1}{2}x$ та $MD = AD - AM = \frac{3}{2}x - x = \frac{1}{2}x$. Таким чином, точка M рівновіддалена від сторін $\angle ABD$, а отже $\angle ABM = \angle MBC = 30^\circ$. Звідси
 $\angle MBC = \angle ABC - \angle MBA = 90^\circ$.

8–4.1. Скільки існує квадратних тричленів $P(x) = ax^2 + bx + c$, коефіцієнти яких є не обов'язково різними цілими одноцифровими невід'ємними числами, для яких справджується рівність: $P(-1) = -5$?

Відповідь: 10.

Розв'язання. Нехай $P(x) = ax^2 + bx + c$, тоді $P(-1) = a - b + c = -5$. При цьому цілі числа a, b, c задовольняють умови: $0 \leq b, c \leq 9$ та $1 \leq a \leq 9$. Позначимо $d = 9 - b$, тоді справджується така умова: $a - 9 + d + c = -5$ та $0 \leq d, c \leq 9, 1 \leq a \leq 9$. Тепер маємо $a + d + c = 4$. Залишається зрозуміти скільки таких наборів існує. Для $a = 1$ маємо, що $d + c = 3$ і таких наборів 4, Для $a = 2, 3$ та 4 відповідно маємо $d + c = 4 - a$ і таких наборів 3, 2 та 1 відповідно. Разом таких тричленів існує рівно 10.

9 клас

9–1. Петро їздить на роботу двома шляхами – або по гарній дорозі зі швидкістю 120 км/год, або по поганій дорозі зі швидкістю 60 км/год. При цьому відомо, що гарна дорога на 16 км довша за погану та поганою дорогою Петро прибуває на роботу на 4 хв раніше. Яка довжина гарної дороги?

Відповідь: 24 км.

Розв'язання. Запишемо рівність часу на дорогу двома шляхами, де від часу по гарній дорозі слід відняти 4 хв, тобто $\frac{4}{60}$ год. Шукану довжину гарної дороги позначимо через S :

$$\frac{S}{120} - \frac{4}{60} = \frac{S - 16}{60} \Rightarrow S - 8 = 2S - 32 \Rightarrow S = 24 \text{ км.}$$

9–2. Знайдіть усі натуральні числа, остання цифра яких не дорівнює нулю, і якщо видалити першу цифру, то отримане число стане в 25 разів менше початкового.

Відповідь: 625, 3125, 9375.

Розв'язання. Нехай n – шукане число. Нехай перша цифра цього числа буде a , а число, утворене з решти цифр, буде m , де число m має k цифр. Тоді $n = 10^k a + m = 25m$, що означає, що $10^k a = 24m$. Таким чином, число $2^k 5^k a$ ділиться на число $24 = 2^3 \cdot 3$. Оскільки число $2^k 5^k a$ не ділиться на 3, число a має ділитися на 3, що залишає можливості $a = 3, 6, 9$.

Якщо $a = 3$, то $2^k 5^k : 2^3$. Отже, $k \geq 3$ і ми отримуємо $m = \frac{2^k 5^k}{24} \cdot 3 = 125 \cdot 10^{k-3}$. З умови, що остання цифра m не дорівнює нулю, ми маємо $m = 125$, звідки $n = 3125$.

Якщо $a = 6$, то $2^k 5^k : 2^2$. Отже, $k \geq 2$ і ми отримуємо $m = \frac{2^k 5^k}{24} \cdot 6 = 25 \cdot 10^{k-2}$. З умови, що остання цифра m не дорівнює нулю, ми маємо $m = 25$, звідки $n = 625$.

Якщо $a = 9$, то $2^k 5^k : 2^3$. Отже, $k \geq 3$ і ми отримуємо $m = \frac{2^k 5^k}{24} \cdot 9 = 375 \cdot 10^{k-3}$. З умови, що остання цифра m не дорівнює нулю, ми маємо $m = 375$, звідки $n = 9375$.

9–3. Заданий гострий кут BAC , на сторонах якого зафіксовані точки B та C . Точки B_1 та C_1 вибрані на бісектрисі цього кута таким чином, що $BB_1 \perp AB$ та $CC_1 \perp AC$. Точка M – середина відрізка B_1C_1 . Доведіть, що $MB = MC$.

Розв'язання. Проведемо перпендикуляр з точки C_1 до точки прямої AB , який перетинає AB у точці C_2 , аналогічно перпендикуляр з точки B_1 до точки прямої AC , який перетинає AC у точці B_2 . Крім

того нехай точка $M_c \in AC$: $MM_c \perp AC$, аналогічно точка $M_b \in AB$: $MM_b \perp AB$. Без обмеження загальності вважатимемо, що точки розташовані так, як це показано на рис. 7. Тоді $B_1B_2 \parallel MM_c \parallel C_1C$ та $C_1C_2 \parallel MM_b \parallel B_1B$. З властивості середини відрізка $B_2M_c = M_cC$ та $C_2M_b = M_bB$. Звідси матимемо, що $B_2M = MC$ та $C_2M = MB$.

Побачимо, що $\angle MB_1B_2 = \angle BB_1M$, з симетрії $BB_1 = B_1B_2$. Звідси $\triangle MB_1B_2 = \triangle MB_1B$ та $BM = MB_2$, тому й $BM = MB_2 = CM$.

9–4. Розглянемо усі підмножини множини $\{1, 2, \dots, N\}$, включно з порожньою множиною, що не містять в якості елементів два сусідні натуральні числа. Для кожної такої підмножини обчислимо добуток усіх її елементів, при цьому добуток елементів порожньої підмножини вважаємо рівним 1. Знайдіть величину $P(N)$ – суму квадратів отриманих добутків.

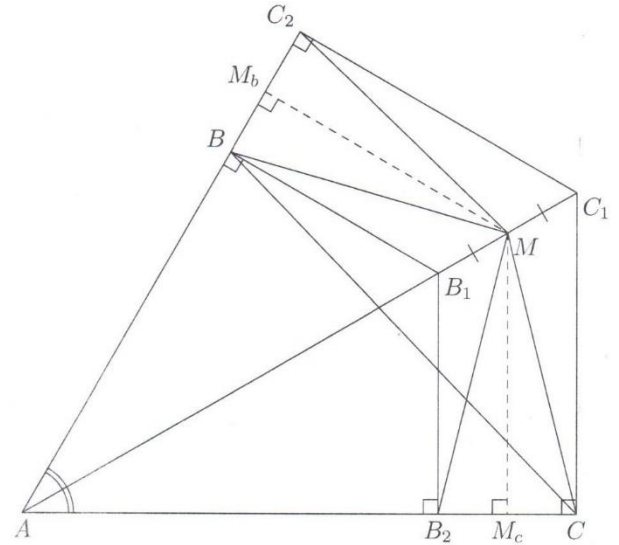


Рис. 7

Відповідь: $P(N) = (N + 1)!$.

Розв'язання. Помітимо, що для $N = 1$, маємо підмножини $\{1\}$ та $\emptyset$, звідки $P(1) = 1 + 1^2 = 2$;

для $N = 2$, додається підмножина $\{2\}$ та $P(2) = P(1) + 2^2 = 6$;

для $N = 3$, додаються підмножини $\{3\}$ та $\{1, 3\}$, а тому $P(3) = P(2) + 3^2 + 3^2 = 24$.

Звідси зробимо припущення, що $P(N) = (N + 1)!$. Доведемо це MMI.

Нехай – це доведене для деякого N . Розглянемо усі шукані підмножини множини $\{1, 2, \dots, N, N + 1\}$, які не потрапляли в розгляд попередніх підмножин для N . Зрозуміло, що то усі підмножини, що містять елемент $N + 1$, але тоді вони точно не містять елемент N . Таким чином отримуємо таку рівність:

$P(N + 1) = P(N) + (N + 1)^2 P(N - 1) = (N + 1)! + (N + 1)^2 N! = (N + 1)! (N + 2) = (N + 2)!$, що й треба було довести.

9–3.1. Шестикутник $ABCDEF$ описаний навколо кола. Відомі довжини таких його сторін: $AB = 27$, $BC = 25$, $CD = 19$ та $EF = 29$. Чому дорівнює сума довжин сторін $DE + FA$?

Відповідь: 50.

Розв'язання. Позначимо точки дотикання сторін AB, BC, CD, DE, EF та FA до вписаного кола через K, L, M, N, S та Q відповідно (рис. 8). З рівності дотичних з однієї точки до кола маємо, що

$$AK = KB, BL = LC, CM = MD, DN = NE, ES = SF, FQ = QA \Rightarrow AB + CD + EF = BC + DE + FA.$$

З умов задачі маємо, що

$$27 + 19 + 29 = 25 + DE + FA \Rightarrow DE + FA = 75 - 25 = 50.$$

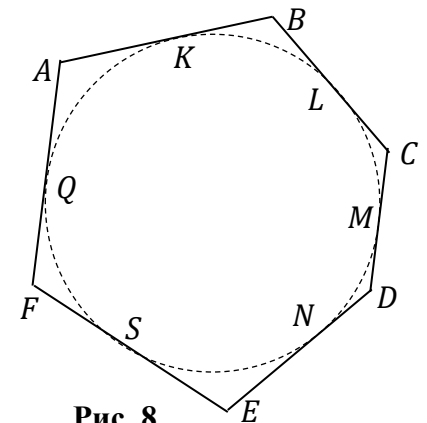


Рис. 8

9–4.1. На острові проживають лише лицарі, які завжди кажуть правду, та брехуни, які завжди брешуть. 40 мешканців острова вишикувалися у 4 черги, в яких стояли по 10 мешканців. У кожній з черг кожний мешканець, окрім трьох перших, сказав, що перед ним в черзі стоїть принаймні 3 брехуни. Скільки лицарів могло бути серед усіх 40 мешканців, що утворили ці черги? Вкажіть усі можливі відповіді.

Відповідь: 28.

Розв'язання. Розглянемо довільну чергу, нехай в ній серед перших трьох мешканців k брехунів та $3 - k$ лицарів. Тоді, якщо $k = 3$, то усі наступні за першими трьома – лицарі, бо вони сказали правду, тобто в цій черзі 3 брехуни і решта – лицарі. Якщо $k < 3$ брехуни, то одразу на перших трьох стоять рівно $3 - k$ брехунів, бо вони збрехали, а далі знову усі лицарі. Таким чином в кожній черзі є рівно 3 брехуни, а решта – лицарі. Таким чином усього брехунів 12, а решта – лицарі, тобто їх усього 28.

10 клас

10–1. У прямокутнику $ABCD$ точки Q , R та S – середини сторін BC , CD та DA відповідно, а точка T – середина відрізка RS . Відомо, що площа прямокутника $ABCD$ дорівнює 64. Чому дорівнює площа трикутника ATQ ?

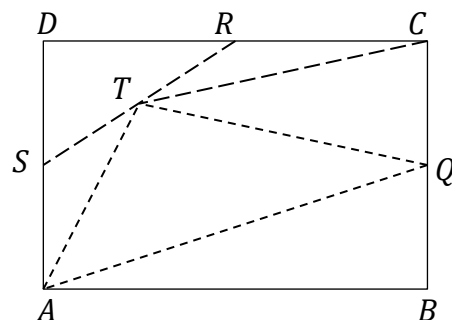


Рис. 9

Відповідь: 20.

Розв'язання. Позначимо сторони заданого прямокутника через $AB = a$, $BC = b$, тоді $RC = RD = \frac{1}{2}a$, $DS = SA = CQ = QB = \frac{1}{2}b$, відстань від точки T до відрізків DC та AD дорівнюють $\frac{1}{4}b$ та $\frac{1}{4}a$ відповідно. При цьому за умовою $ab = 64$. Тоді можемо порахувати площу усіх трикутників, що зображені на рис. 9, окрім ΔATQ .

$$S_{AST} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}b \cdot \frac{1}{4}a = \frac{ab}{16} = 4, S_{DRS} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}b \cdot \frac{1}{2}a = \frac{ab}{8} = 8,$$

$$S_{RCT} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}a \cdot \frac{1}{4}b = \frac{ab}{16} = 4, S_{CTQ} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}b \cdot \frac{3}{4}a = \frac{3ab}{16} = 12, S_{AQB} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}b \cdot a = \frac{ab}{4} = 16.$$

Далі знаходимо, що

$$S_{AQT} = S_{ABCD} - S_{AST} - S_{DRS} - S_{RCT} - S_{CTQ} - S_{AQB} = 64 - 44 = 20.$$

10–2. В рядок записані $n \geq 42$ чисел, кожне з яких дорівнює «+1» або «-1». Розстановка чисел задовольняє такі умови:

- сума будь-яких 40 чисел, що стоять поспіль, дорівнює 0;
- сума будь-яких 42 чисел, що стоять поспіль, не дорівнює 0.

Яке найбільше можливе значення може приймати сума $S(n)$ усіх записаних чисел та для яких n воно може досягатися?

Відповідь: 20 для $n = 60$.

Розв'язання. Позначимо ці числа зліва направо таким чином: $a_1, a_2, \dots, a_n$. Тоді з умови задачі можна записати такі співвідношення:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_{40} = 0, a_1 + a_2 + \dots + a_{40} + a_{41} + a_{42} \neq 0 \Rightarrow a_{41} + a_{42} \neq 0.$$

Тоді $a_{41} = a_{42}$. З аналогічних міркувань

$$a_2 + a_3 + \dots + a_{41} = 0, a_2 + a_3 + \dots + a_{41} + a_{42} + a_{43} \neq 0 \Rightarrow a_{42} = a_{43} \Rightarrow$$

$$a_{41} = a_{42} = a_{43} = \dots = a_n \Rightarrow n \leq 60.$$

Бо інакше, якщо припустити, що $n > 60$, то в сумі 40 послідовних чисел $a_{n-39} + a_{n-38} + \dots + a_n$ більше 20 однакові, а тому сума не може дорівнювати 0. Таким чином найбільше можливе значення $S(n)$ співпадає з найбільшим можливим значенням виразу $a_{41} + a_{42} + \dots + a_n$. Зрозуміло, що максимум можливий за умови $n = 60$ та $a_{41} = a_{42} = \dots = a_{60} = 1$ і це значення дорівнює 20.

10–3. Нехай a , b та c – попарно різні натуральні числа, при цьому число $p = ab + bc + ca$ – просте. Натуральні числа x , y та z – це остачі при діленні на p чисел a^2 , b^2 та c^2 відповідно. Доведіть, що числа x , y та z – попарно різні.

Розв'язання. Методом від супротивного, припустимо, що деякі два з наведених чисел співпадають.

Наприклад, $a^2 \equiv b^2 \pmod{p} \Rightarrow p \mid a^2 - b^2 = (a - b)(a + b) \Rightarrow p \mid (a - b)$ або $p \mid (a + b)$. Але тоді в обох випадках

$$p \leq a + b \leq c(a + b) < ab + bc + ca = p,$$

отримали суперечність.

10–4. Для дійсних чисел a, b, c, d , що задовольняють умови $0 < a, b, c, d < 1$ та $a + b + c + d = 2$, доведіть, що справджується нерівність:

$$\sqrt{(1-a)(1-b)(1-c)(1-d)} \leq \frac{ab+cd}{2}.$$

Розв'язання. Перепишемо нерівність таким чином:

$$(2-2a)(2-2b)(2-2c)(2-2d) \leq 4(ab+cd)^2.$$

Замінімо в лівій частині окремі доданки 2 на $a + b + c + d$:

$$\begin{aligned} (a+b+c+d-2a)(a+b+c+d-2b)(a+b+c+d-2c)(a+b+c+d-2d) &\leq 4(ab+cd)^2 \\ \Leftrightarrow (b+d-(a-c))(a+c-(b-d))(b+d+(a-c))(a+c+(b-d)) &\leq 4(ab+cd)^2 \Leftrightarrow \\ ((a+c)^2 - (b-d)^2)((b+d)^2 - (a-c)^2) &= \\ = (2ac + 2bd + a^2 + c^2 - b^2 - d^2)(2ac + 2bd + b^2 + d^2 - a^2 - c^2) &= \\ = (2ac + 2bd)^2 - (a^2 + c^2 - b^2 - d^2)^2 &\leq 4(ab+cd)^2. \end{aligned}$$

10–3.1. Натуральне число k називається *реверсивним*, якщо для нього існує натуральне число n , що не закінчується нулем та справджується рівність: $k = n - n'$, де число n' має цифри числа n , що записані у зворотному порядку. Наприклад, число 2178 – реверсивне, бо $2178 = 4202 - 2024$. З'ясуйте, чи є число $k = 2538$ реверсивним. Якщо так, то знайдіть відповідне натуральне число n , для якого справджується рівність $k = n - n'$.

Відповідь: так, $n = 3601$.

Розв'язання. Припустимо, що число n – чотирицифрове, тоді і n' також чотирицифрове, позначимо його через $n = \overline{abcd}$, $n' = \overline{dcba}$. Зрозуміло, що $a > d$, бо інакше число $n - n' = 2538$ не буде чотирицифровим. Тоді з віднімання одиниць маємо, що $10 + d - a = 8 \Rightarrow a = d + 2$. Тоді для віднімання тисяч маємо, що не відбувається перенос розряду, а тому $b \geq c$, оскільки в розряді десятків з цифри c була знята 1, то і з віднімання сотень буде знята 1, тому $b > c$. Тоді $b - 1 - c = 5$, тобто $b = c + 6$. Щоб шукане число n було найменшим можливим, то найменшою має бути цифра a . З умов $a = d + 2$ та $d \neq 0$ випливає, що $a = 3$ та $d = 1$. Аналогічно, для мінімальності n має бути $b = 6$ та $c = 0$. Звідси $n = 3601$, тоді $n' = 1063$ та $3601 - 1063 = 2538$.

10–4.1. Знайдіть усі трійки цілих чисел (a, b, c) , що задовольняють системі рівнянь:

$$\begin{cases} a^2 + b^3 = c^4, \\ c^2 + b^3 = a^4. \end{cases}$$

Відповідь: $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 1)$, $(1, 0, -1)$, $(-1, 0, 1)$ та $(-1, 0, -1)$.

Розв'язання. Віднімемо ці рівняння:

$$a^2 - c^2 = c^4 - a^4 \Rightarrow a^4 - c^4 + a^2 - c^2 = 0 \Rightarrow (a^2 - c^2)(a^2 + c^2 + 1) = 0 \Rightarrow a^2 = c^2.$$

Звідси маємо, що $a^2 + b^3 = a^4 \Rightarrow b^3 = a^4 - a^2 = a^2(a^2 - 1)$.

Оскільки числа a^2 та $a^2 - 1$ – взаємно прості, то кожне з них має бути кубом цілого числа. Оскільки це послідовні цілі числа, то можливі лише такі варіанти: $a^2 = 0$ та $a^2 - 1 = -1$ або $a^2 = 1$ та $a^2 - 1 = 0$. У першому випадку $a = c = 0 = b$. У другому випадку $a = \pm 1$, $c = \pm 1$ та $b = 0$.

11 клас

11–1. Випишемо деякі великі латинські літери, які можуть бути записаними декількома відрізками:

$A, E, F, H, I, K, L, M, N, T, V, W, X, Y$ та Z .

Вагою літери назвемо кількість прямолінійних відрізків, з яких вона утворена, наприклад, літера Y з 3-х відрізків, літера I – з 1-го, літера M – з 4-х. *Словом* назвемо послідовність літер із наведеного списку в будь-якому порядку, не обов'язково різних, в якій літер не менше двох, порядок літер також відрізняє слова. *Вагою слова* назвемо сумарну вагу усіх літер, з яких утворене слово. Якщо літера зустрічається у слові двічі чи більше разів, то в вазі слова вона враховується відповідну кількість разів. Наприклад, вага слова LY дорівнює 5. Скільки існує слів, вага яких дорівнює 4?

Відповідь: 43.

Розв'язання. Зрозуміло, що літер вагою 4 чи більше не може бути в жодному слові, яке ми шукаємо. Літери вагою 3 – це A, F, H, K, N, Y та Z , літери вагою 2 – це L, T, V та X і, нарешті, є одна літера вагою 1 – це літера I . Оскільки

$$4 = 3 + 1 = 2 + 2 = 2 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1,$$

то відповідно треба розглянути 4 випадки.

Випадок $3 + 1$: тут 7 способами можна вибрати літеру ваги 3 та одним – ваги 1, і вони можуть йти в обох порядках, тому усього таких слів 14.

Випадок $2 + 2$: тут 4 способами можна вибрати першу літеру та 4 способами другу цифру, тому усього таких слів 16.

Випадок $2 + 1 + 1$: тут 4 способами можна вибрати літеру ваги 2 та 1 варіант для вибору обох літер ваги 1, крім того порядок цих літер можна вибрати 3 способами, тому усього таких слів 12.

Випадок $1 + 1 + 1 + 1$: тут існує рівно 1 таке слово.

Разом маємо $14 + 16 + 12 + 1 = 43$.

11–2. Знайдіть усі пари натуральних чисел (k, n) , що задовольняють рівності:

$$k(k + 5)^2 + 12 = n^3.$$

Відповідь: $k = 5, n = 8$.

Розв'язання. Розглянемо такі нерівності:

$$(k + 2)^3 = k^3 + 6k^2 + 12k + 8 < k(k + 5)^2 + 12,$$

$$(k + 4)^3 = k^3 + 12k^2 + 48k + 64 > k(k + 5)^2 + 12.$$

Таким чином єдина можливість $n = k + 3 \Rightarrow$

$$n = (k + 3)^3 = k^3 + 9k^2 + 27k + 27 = k(k + 5)^2 + 12 = k^3 + 10k^2 + 25k + 12 \Rightarrow$$

$$0 = k^2 - 2k - 15 = (k - 5)(k + 3) \Rightarrow k = 5, n = 8.$$

11–3. З точки P побудували дві дотичні PB та PT до деякого кола. Точка A така, що відрізок AB – це діаметр цього кола. Точка H – проекція точки T на діаметр AB . Доведіть, що відрізок AP ділить навпіл відрізок TH .

Розв'язання. Позначимо через O – центр кола, нехай точка P' вибрана на прямій AT така, що $OP' \perp AB$ (рис. 10). Тоді BT перпендикулярний OP та AT , тому ці відрізки паралельні. З теореми про середню лінію пряма OP' перетинає відрізок AP в середині. Таким чином $OAP'P$ – паралелограм. Звідси, якщо AP ділить навпіл відрізок OP' , то з аналогічних міркувань (або з міркувань подібності) він ділить навпіл і відрізок TH .

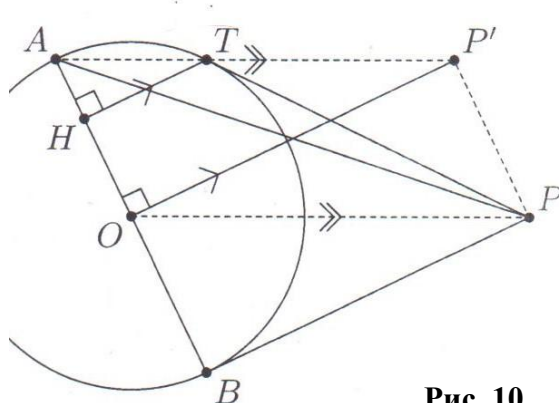


Рис. 10

11–4. Знайдіть усі такі функції $f: N \rightarrow N$, що для довільного натурального числа n справджується рівність: $f(n + 1)f(n + 2) = f^2(n)$.

Відповідь: $f(n) = m = \text{const}$ для довільного натурального m .

Розв'язання. Припустимо, що функція відмінна від сталої. Тоді знайдемо найменше можливе значення $m = f(n)$, $n \in N$. Якщо для деякого натурального числа k маємо, що $f(k+1) > f(k) = m$, то

$$f(k+2) = \frac{f^2(k)}{f(k+1)} = f(k) \cdot \frac{f(k)}{f(k+1)} < f(k),$$

одержали суперечність.

Якщо не існує такого натурального числа k маємо, що $f(k+1) = f(k) = m$ та функція не є сталою, то починаючи з деякого номера K для усіх $k \geq K$ матимемо, що $f(k) = m$, а для $k < K$ $f(k) > m$. Тоді

$$f^2(K-1) = f(K)f(K+1) = m^2,$$

і знову отримали суперечність. Таким чином умову може задовольняти лише стала функція. Зауважимо, що $f(n) = m$ задовольняє умову для довільного натурального m .

Альтернативне розв'язання. Подивимось на $f(1), f(2), f(3)$, якщо вони однакові, тоді з рівняння очевидно випливає, що функція є константою. Будемо позначати за $\deg_p(t)$ – степінь входження в число t дільника p . Отже знайшовся такий дільник p , що $\deg_p(f(1)) = \alpha$, $\deg_p(f(2)) = \beta$, та $\beta \neq \alpha$, тоді нехай $\beta < \alpha$, $\deg_p(f(3)) = 2\alpha - \beta > \alpha$. Подивимось на рівняння $f(2)^2 = f(3) \cdot f(4) \Rightarrow \deg_p(f(4)) = 3\beta - 2\alpha < \beta + 2\alpha - 2\alpha = \beta < \alpha$.

Подивимось на рівняння

$$f(3)^2 = f(4) \cdot f(5) \Rightarrow \deg_p(f(5)) = 2\deg_p(f(3)) - \deg_p(f(4)) > \deg_p(f(3)) > \deg_p(f(4)).$$

Подивимось на рівняння

$$f(4)^2 = f(5) \cdot f(6) \Rightarrow \deg_p(f(6)) = 2\deg_p(f(4)) - \deg_p(f(5)) < \deg_p(f(4)).$$

Аналогічно продовжуючи отримаємо

$$\deg_p(f(2)) > \deg_p(f(6)) > \deg_p(f(8)) > \dots$$

але нескінченно так продовжуватись не може, бо числа натуральні, а отже функція є сталою.

11–3.1. Всередині правильного шестикутника $ABCDEF$, вибрані такі точки X, Y та Z , що чотирикутники $ABZY$, $CDXZ$ та $EFYX$ є прямокутниками. Знайдіть відношення площі шестикутника $ABCDEF$ до площі чотирикутника $ABZY$.

Відповідь: $\frac{9}{2}$.

Розв'язання. Нехай сторона шестикутника $ABCDEF$ дорівнює 1 (рис. 11). З міркувань симетрії $\triangle BCZ$ – рівнобедрений, при цьому $\angle ZCB = 30^\circ \Rightarrow BZ = \frac{BM}{\cos 30^\circ} = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Звідси $S_{BZYA} = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Зрозуміло, що $S_{ABCDEF} = 6S_{\Delta}$, де через Δ позначений рівносторонній трикутник зі стороною 1. Тому $S_{ABCDEF} = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}$. Далі остаточно отримуємо, що

$$\frac{S_{ABCDEF}}{S_{BZYA}} = \frac{\frac{3\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{9}{2}.$$

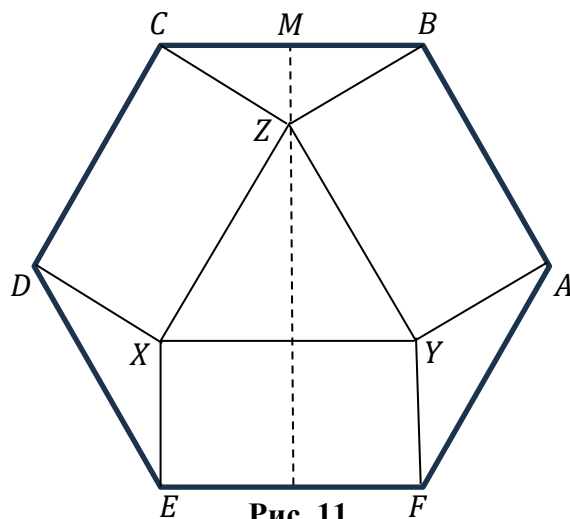


Рис. 11

11–4.1. Відомо, що функція f для довільних дійсних x задовольняє такі умови:

$$f(x) = f(2025 - x), f(x + 10) = f(2014 - x).$$

Відомо також, що $f(3) + f(4) + f(5) + f(6) = 100$. Які значення може приймати сума $f(16) + f(17) + f(18)$? Вкажіть усі можливі відповіді.

Відповідь: 75.

Розв'язання. Помітимо, що з другої рівності підстановкою $x + 10 = y$, маємо що $f(y) = f(2024 -$

у), звідки разом з першим рівнянням, маємо що $f(x + 1) = f(x)$, отже функція приймає однакові значення при усіх цілих значеннях аргументів. Отже з третьої рівності, $f(x) = 25$ для усіх цілих значень x . Тому $f(16) + f(17) + f(18) = 75$.