

*«Ставлення держави до вчителя – це державна політика,
яка свідчить або про силу держави, або про її слабкість».*
Отто фон Бісмарк

8 клас (середній рівень)

8–1. Для натурального числа n через $n!$ позначимо добуток $1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$. На скільки нулів закінчується вираз $\frac{2025!}{2000!}$?

8–2. У матері є 7 яблук, 6 груш та 5 апельсинів. Вона хоче розділити їх між двома дітьми так, щоб кожна дитина отримала по 9 фруктів. Скількома різними способами це можна зробити? Якщо якась дитина отримує різну кількість деякого з видів фруктів, то такий розподіл вважається різним.

8–3. Заданий квадрат $ABCD$ зі стороною 1. На сторонах AB та AD вибрані точки P та Q відповідно таким чином, що периметр $\triangle APQ$ дорівнює 2. Яке найбільше значення може приймати за таких умов величина $\angle PCQ$?

8–4. Скільки існує квадратних тричленів $P(x) = ax^2 + bx + c$, коефіцієнти яких є не обов'язково різними цілими одноцифровими невід'ємними числами, для яких справджується рівність: $P(-1) = -5$?

18 жовтня 2025 р.

На виконання завдання відводиться 3 години
Кожна задача оцінюється в 7 балів

*«Ставлення держави до вчителя – це державна політика,
яка свідчить або про силу держави, або про її слабкість».*
Отто фон Бісмарк

8 клас (середній рівень)

8–1. Для натурального числа n через $n!$ позначимо добуток $1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$. На скільки нулів закінчується вираз $\frac{2025!}{2000!}$?

8–2. У матері є 7 яблук, 6 груш та 5 апельсинів. Вона хоче розділити їх між двома дітьми так, щоб кожна дитина отримала по 9 фруктів. Скількома різними способами це можна зробити? Якщо якась дитина отримує різну кількість деякого з видів фруктів, то такий розподіл вважається різним.

8–3. Заданий квадрат $ABCD$ зі стороною 1. На сторонах AB та AD вибрані точки P та Q відповідно таким чином, що периметр $\triangle APQ$ дорівнює 2. Яке найбільше значення може приймати за таких умов величина $\angle PCQ$?

8–4. Скільки існує квадратних тричленів $P(x) = ax^2 + bx + c$, коефіцієнти яких є не обов'язково різними цілими одноцифровими невід'ємними числами, для яких справджується рівність: $P(-1) = -5$?

18 жовтня 2025 р.

На виконання завдання відводиться 3 години
Кожна задача оцінюється в 7 балів

*«Ставлення держави до вчителя – це державна політика,
яка свідчить або про силу держави, або про її слабкість».*
Отто фон Бісмарк

9 клас (середній рівень)

9–1. Петро їздить на роботу двома шляхами – або по гарній дорозі зі швидкістю 120 км/год, або по поганій дорозі зі швидкістю 60 км/год. При цьому відомо, що гарна дорога на 16 км довша за погану та поганою дорогою Петро прибуває на роботу на 4 хв раніше. Яка довжина гарної дороги?

9–2. Знайдіть усі натуральні числа, остання цифра яких не дорівнює нулю, і якщо видалити першу цифру, то отримане число стане в 25 разів менше початкового.

9–3. Заданий гострий кут BAC , на сторонах якого зафіксовані точки B та C . Точки B_1 та C_1 вибрані на бісектрисі цього кута таким чином, що $BB_1 \perp AB$ та $CC_1 \perp AC$. Точка M – середина відрізка B_1C_1 . Доведіть, що $MB = MC$.

9–4. На острові проживають лише лицарі, які завжди кажуть правду, та брехуни, які завжди брешуть. 40 мешканців острова вишикувалися у 4 черги, в яких стояли по 10 мешканців. У кожній з черг кожний мешканець, окрім трьох перших, сказав, що перед ним в черзі стоїть принаймні 3 брехуни. Скільки лицарів могло бути серед усіх 40 мешканців, що утворили ці черги? Вкажіть усі можливі відповіді.

18 жовтня 2025 р.

*«Ставлення держави до вчителя – це державна політика,
яка свідчить або про силу держави, або про її слабкість».*
Отто фон Бісмарк

9 клас (середній рівень)

9–1. Петро їздить на роботу двома шляхами – або по гарній дорозі зі швидкістю 120 км/год, або по поганій дорозі зі швидкістю 60 км/год. При цьому відомо, що гарна дорога на 16 км довша за погану та поганою дорогою Петро прибуває на роботу на 4 хв раніше. Яка довжина гарної дороги?

9–2. Знайдіть усі натуральні числа, остання цифра яких не дорівнює нулю, і якщо видалити першу цифру, то отримане число стане в 25 разів менше початкового.

9–3. Заданий гострий кут BAC , на сторонах якого зафіксовані точки B та C . Точки B_1 та C_1 вибрані на бісектрисі цього кута таким чином, що $BB_1 \perp AB$ та $CC_1 \perp AC$. Точка M – середина відрізка B_1C_1 . Доведіть, що $MB = MC$.

9–4. На острові проживають лише лицарі, які завжди кажуть правду, та брехуни, які завжди брешуть. 40 мешканців острова вишикувалися у 4 черги, в яких стояли по 10 мешканців. У кожній з черг кожний мешканець, окрім трьох перших, сказав, що перед ним в черзі стоїть принаймні 3 брехуни. Скільки лицарів могло бути серед усіх 40 мешканців, що утворили ці черги? Вкажіть усі можливі відповіді.

18 жовтня 2025 р.

*«Ставлення держави до вчителя – це державна політика,
яка свідчить або про силу держави, або про її слабкість».*
Отто фон Бісмарк

10 клас (середній рівень)

10–1. У прямокутнику $ABCD$ точки Q , R та S – середини сторін BC , CD та DA відповідно, а точка T – середина відрізка RS . Відомо, що площа прямокутника $ABCD$ дорівнює 64. Чому дорівнює площа трикутника ATQ ?

10–2. В рядок записані $n \geq 42$ чисел, кожне з яких дорівнює «1» або «–1». Розстановка чисел задовольняє такі умови:

- сума будь-яких 40 чисел, що стоять поспіль, дорівнює 0;
- сума будь-яких 42 чисел, що стоять поспіль, не дорівнює 0.

Яке найбільше можливе значення може приймати сума $S(n)$ усіх записаних чисел та для яких n воно може досягатися?

10–3. Нехай a , b та c – попарно різні натуральні числа, при цьому число $p = ab + bc + ca$ – просте. Натуральні числа x , y та z – це остачі при діленні на p чисел a^2 , b^2 та c^2 відповідно. Доведіть, що числа x , y та z – попарно різні.

10–4. Знайдіть усі трійки цілих чисел (a, b, c) , що задовольняють системі рівнянь:

$$\begin{cases} a^2 + b^3 = c^4, \\ c^2 + b^3 = a^4. \end{cases}$$

18 жовтня 2025 р.

*«Ставлення держави до вчителя – це державна політика,
яка свідчить або про силу держави, або про її слабкість».*
Отто фон Бісмарк

10 клас (середній рівень)

10–1. У прямокутнику $ABCD$ точки Q , R та S – середини сторін BC , CD та DA відповідно, а точка T – середина відрізка RS . Відомо, що площа прямокутника $ABCD$ дорівнює 64. Чому дорівнює площа трикутника ATQ ?

10–2. В рядок записані $n \geq 42$ чисел, кожне з яких дорівнює «1» або «–1». Розстановка чисел задовольняє такі умови:

- сума будь-яких 40 чисел, що стоять поспіль, дорівнює 0;
- сума будь-яких 42 чисел, що стоять поспіль, не дорівнює 0.

Яке найбільше можливе значення може приймати сума $S(n)$ усіх записаних чисел та для яких n воно може досягатися?

10–3. Нехай a , b та c – попарно різні натуральні числа, при цьому число $p = ab + bc + ca$ – просте. Натуральні числа x , y та z – це остачі при діленні на p чисел a^2 , b^2 та c^2 відповідно. Доведіть, що числа x , y та z – попарно різні.

10–4. Знайдіть усі трійки цілих чисел (a, b, c) , що задовольняють системі рівнянь:

$$\begin{cases} a^2 + b^3 = c^4, \\ c^2 + b^3 = a^4. \end{cases}$$

18 жовтня 2025 р.

*«Ставлення держави до вчителя – це державна політика,
яка свідчить або про силу держави, або про її слабкість».*
Отто фон Бісмарк

11 клас (середній рівень)

11–1. Випишемо деякі великі латинські літери, які можуть бути записаними декількома відрізками:

A, E, F, H, I, K, L, M, N, T, V, W, X, Y та Z.

Вагою літери назвемо кількість прямолінійних відрізків, з яких вона утворена, наприклад, літера *Y* з 3-х відрізків, літера *I* – з 1-го, літера *M* – з 4-х. *Словом* назвемо послідовність літер із наведеного списку в будь-якому порядку, не обов'язково різних, в якій літер не менше двох, порядок літер також відрізняє слова. *Вагою слова* назвемо сумарну вагу усіх літер, з яких утворене слово. Якщо літера зустрічається у слові двічі чи більше разів, то в вазі слова вона враховується відповідну кількість разів. Наприклад, вага слова *LY* дорівнює 5. Скільки існує слів, вага яких дорівнює 4?

11–2. Знайдіть усі пари натуральних чисел (k, n) , що задовольняють рівності: $k(k + 5)^2 + 12 = n^3$.

11–3. З точки P побудували дві дотичні PB та PT до деякого кола. Точка A така, що відрізок AB – це діаметр цього кола. Точка H – проекція точки T на діаметр AB . Доведіть, що відрізок AP ділить навпіл відрізок TH .

11–4. Відомо, що функція f для довільних дійсних x задовольняє такі умови: $f(x) = f(2025 - x)$, $f(x + 10) = f(2014 - x)$. Відомо також, що $f(3) + f(4) + f(5) + f(6) = 100$. Які значення може приймати сума $f(16) + f(17) + f(18)$? Вкажіть усі можливі відповіді.

18 жовтня 2025 р.

*«Ставлення держави до вчителя – це державна політика,
яка свідчить або про силу держави, або про її слабкість».*
Отто фон Бісмарк

11 клас (середній рівень)

11–1. Випишемо деякі великі латинські літери, які можуть бути записаними декількома відрізками:

A, E, F, H, I, K, L, M, N, T, V, W, X, Y та Z.

Вагою літери назвемо кількість прямолінійних відрізків, з яких вона утворена, наприклад, літера *Y* з 3-х відрізків, літера *I* – з 1-го, літера *M* – з 4-х. *Словом* назвемо послідовність літер із наведеного списку в будь-якому порядку, не обов'язково різних, в якій літер не менше двох, порядок літер також відрізняє слова. *Вагою слова* назвемо сумарну вагу усіх літер, з яких утворене слово. Якщо літера зустрічається у слові двічі чи більше разів, то в вазі слова вона враховується відповідну кількість разів. Наприклад, вага слова *LY* дорівнює 5. Скільки існує слів, вага яких дорівнює 4?

11–2. Знайдіть усі пари натуральних чисел (k, n) , що задовольняють рівності: $k(k + 5)^2 + 12 = n^3$.

11–3. З точки P побудували дві дотичні PB та PT до деякого кола. Точка A така, що відрізок AB – це діаметр цього кола. Точка H – проекція точки T на діаметр AB . Доведіть, що відрізок AP ділить навпіл відрізок TH .

11–4. Відомо, що функція f для довільних дійсних x задовольняє такі умови: $f(x) = f(2025 - x)$, $f(x + 10) = f(2014 - x)$. Відомо також, що $f(3) + f(4) + f(5) + f(6) = 100$. Які значення може приймати сума $f(16) + f(17) + f(18)$? Вкажіть усі можливі відповіді.

18 жовтня 2025 р.