II етап Всеукраїнської олімпіади з математики 2024 рік

6 клас

1. До числа 15 допишіть ліворуч і праворуч по одній цифрі так, щоб число, яке утвориться, було кратним 15. Вкажіть усі розв'язки задачі.

   Вказівка: щоб число ділилося на 15, то воно має ділитися на 5 і на 3. А це означає, що числа мають закінчуватися цифрою 0 або 5 і сума їх цифр ділитися на 3.
   Відповідь: 1155, 4155, 7155, 3150, 6150, 9150.

2. У першості з футболу було зіграно 21 матч. Кожна команда зіграла з іншою по одному разу. Скільки команд брало участь у першості?

Вказівка: нехай n – кількість команд, які брали участь у першості з футболу. Тоді кожною з них було зіграно (n – 1) матч. Зрозуміло, що якщо команда А зіграла з командою В, то це все рівно, що команда В зіграла з командою А. Таким чином, у першості з футболу було проведено $\frac{n(n-1)}{2}$ матчів. Отримаємо $\frac{n(n-1)}{2} = 21$, звідки $(n-1)n = 42$. Так як $(n-1)$ і n два послідовних натуральних числа, причому очевидно, що $n > 1$, то $n = 7$.
Відповідь: у першості з футболу було 7 команд.

3. Аня, Таня, Микола і Максим вміють грати на різних музичних інструментах: бандурі, арфі, акордеоні та скрипці, але кожна дитина тільки на одному. Вони також знають іноземні мови: англійську, французьку, німецьку, іспанську, проте кожна дитина лише одну. Відомо, що дитина, яка грає на акордеоні, говорить іспанською. Таня не грає ні на скрипці, ні на арфі й не знає англійської мови. Аня не грає ні на скрипці, ні на арфі й не знає ні німецької, ні англійської мови. Дитина, котра говорить німецькою, грає на бандурі. Микола знає французьку мову, але не грає на скрипці. З'ясуйте, хто на якому інструменті грає та якою мовою розмовляє? Відповідь обґрунтуйте.

   Вказівка:

	бандура	арфа	акордеон	скрипка	англійська	французька	німецька	іспанська
Аня	–	–	+	–	–	–	–	+
Таня	+	–	–	–	–	–	+	–
Микола	–	+	–	–	–	+	–	–
Максим	–	–	–	+	+	–	–	–

Відповідь: Аня грає на акордеоні і знає іспанську мову, Таня грає на бандурі і знає німецьку мову, Микола грає на арфі і знає французьку мову, Максим грає на скрипці і знає англійську мову.

4. Пилип і Ярина записують дев'ятнадцятицифрове число, використовуючи тільки цифри 1, 2 і 4. Першу цифру пише Пилип, другу – Ярина, третю – знову Пилип і т.д. по черзі. Пилип хоче отримати в результаті число, кратне 3. Чи може Ярина завадити йому це зробити?

Вказівка: так. Числа 1, 2 і 4 не кратні 3. Отже, Ярина має грати так, щоб після кожного її ходу на дошці було число, кратне 3. Якщо після ходу Пилипа при діленні на 3 отримали остачу 1, то Ярина дописує 2; якщо остачу 2, то 1 або 4.

Відповідь: так.

Кожне завдання оцінюється 7-ма балами *м.Ужгород*

Час розв'язання 3 год.

Користування калькуляторами заборонено

II етап Всеукраїнської олімпіади з математики 2024 рік

7 клас

1. Тато старший за маму на 7 років. Їхня донька Катерина у чотири рази молодша за тата, а сину Віктору один рік. Якщо скласти суму років тата, мами, Катерини і Віктора, то отримаємо $\frac{3}{4}$ від 100. Скільки років мамі?

Вказівка: нехай x років Катерині, тоді $4x$ років татові, $(4x-7)$ років мамі. Очевидно, що $\frac{3}{4}$ від 100 це 75. Отримаємо рівняння $4x + (4x-7) + x + 1 = 75$. Звідси $x = 9$. Тоді мамі 29 років.

Відповідь: мамі 29 років.

2. Розв’яжіть рівняння: $|x+2| + x^2 = -4-4x$.

Вказівка: перепишемо рівняння у вигляді: $|x+2| + (x+2)^2 = 0$. Отримаємо суму невід’ємних чисел, яка дорівнює нулю. Це можливо, коли кожен доданок дорівнює нулю. Отже, $x = -2$.

Відповідь: $x = -2$.

3. Обчисліть значення виразу:

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{2023\cdot 2024}+\frac{1}{2024\cdot 2025}$$

Вказівка:

Легко бачити, що $\frac{1}{n\cdot(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$.

Тоді

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{2023\cdot 2024}+\frac{1}{2024\cdot 2025}$$
$$=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\cdots+\frac{1}{2023}-\frac{1}{2024}+\frac{1}{2024}-\frac{1}{2025}=1-\frac{1}{2025}=\frac{2024}{2025}$$

Відповідь: $\frac{2024}{2025}$.

4. У середині тупого кута AOB провели три промені OC, OD і OE, причому $OC\perp OA$, OD – бісектриса кута AOB і OE – бісектриса кута BOC. Знайдіть величину кута DOE .

Вказівка: зрозуміло, що промені розташовані в такому порядку: *OA, OD, OC, OE, OB*. Якщо $\angle AOB = 2\alpha$, то $\angle BOD = \alpha$, $\angle BOE = \alpha - 45^0$, а тому $\angle DOE = \angle BOD - \angle BOE = 45^0$

Відповідь: 45^0.

5. Тимур і Максим грають у таку гру. Є 9 гир вагою 1 г, 2 г, ..., 9 г та ваги із стрілкою. Хлопчики по черзі беруть гирі та кладуть їх на ваги, не знімаючи попередні гирі. Якщо після чергової гирі стрілка покаже вагу більше 35 г, то той, хто поклав цю гирю,

програв. З’ясуйте, чи може забезпечити собі перемогу в цій грі Тимур, якщо він першим робить хід? Відповідь обґрунтуйте.

Вказівка: так, може. Першим ходом Тимур має покласти гирю вагою 5 г, а далі, якої б ваги не вибрав гирю Максим, Тимур вибирає гирю вагою, яка доповнить вагу гирі Максима до 10 г. Після четвертого ходу Тимура стрілка на вагах покаже 35 г і Максим програє, зробивши наступний хід.

Відповідь: так, може.

Кожне завдання оцінюється 7-ма балами *м.Ужгород*
Час розв’язання 4 год.
Користування калькуляторами заборонено

II етап Всеукраїнської олімпіади з математики 2024 рік

8 клас

1. Кінь і мул ішли бік у бік з важкою ношею на спинах. Кінь скаржився на свій непомірний тягар. «Чому ти скаржишся? — запитав його мул. — Адже, якщо я візьму у тебе один мішок, моя ноша стане вдвічі важча за твою. А ось якби ти взяв з моєї спини один мішок, твоя стала б однаковою з моєю». Скільки мішків ніс кінь і скільки мішків ніс мул?

Вказівка: нехай x мішків несе кінь, y мішків несе мул. Тоді

Якщо я візьму у тебе один мішок	$x - 1$
Моя ноша	$y+1$
Стане вдвічі важчою за твою	$y+1=2(x-1)$
А ось, коли б ти взяв з моєї спини один мішок	$y - 1$
Твоя ноша	$x+1$
Стала б однаковою з моєю	$y - 1 = x+1$

Ми звели задачу до системи рівнянь з двома змінними:

$$\begin{cases} y+1=2(x-1) \\ y-1=x+1 \end{cases}$$

Розв'язавши систему рівнянь, отримаємо $x = 5$, $y = 7$.

Відповідь: кінь ніс 5 мішків, а мул — 7 мішків.

2. Відомо, що при деяких значеннях x і y виконується рівність $x^2 + y^2 = 1$. Знайдіть при цих самих значеннях x і y значення виразу $2x^4 + 3x^2y^2 + y^4 + y^2$.

Вказівка:

$$2x^4 + 3x^2y^2 + y^4 + y^2 = (x^4 + 2x^2y^2 + y^4) + (x^4 + x^2y^2) + y^2$$
$$= (x^2 + y^2)^2 + x^2(x^2 + y^2) + y^2 = 2$$

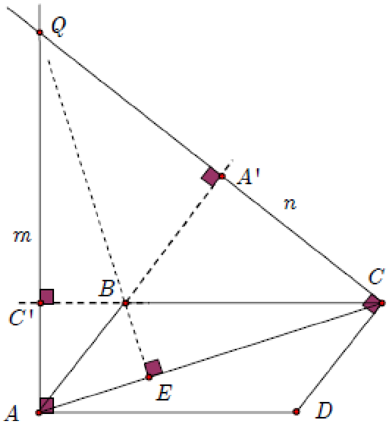
Відповідь: 2.

3. Віктор помножив деяке двоцифрове число на першу цифру, а Катерина помножила теж саме число на другу цифру. Доведіть, що сума отриманих чисел не може дорівнювати 672.

Вказівка: $\overline{ab} \vdots 3$ тоді і тільки тоді, коли $(a+b) \vdots 3$. Припустимо, що $\overline{ab} \cdot a + \overline{ab} \cdot b = 672$. Тоді $\overline{ab} \cdot (a+b) = 672$. Значить $\overline{ab} \cdot (a+b) = (9a + a + b)(a+b)$ ділиться на 3. Тому $(a+b) \vdots 3$. Однак 672 на 9 не ділиться.

Відповідь: доведено.

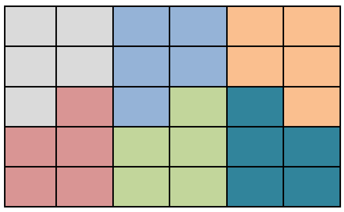
4. Із вершини тупого кута *B* паралелограма *ABCD* опустили перпендикуляр *BE* на діагональ *AC*. Через точку *A* провели пряму *m*, перпендикулярну до прямої *AD*, а через точку *C* – пряму *n*, перпендикулярну до прямої *CD*. Доведіть, що точка перетину прямих *m* і *n* належить прямій *BE*.



Вказівка: так як *ABCD* паралелограм, то $AD||BC$, $CD||AB$. Тому якщо $m\perp AD$, то $m\perp BC$.
Аналогічно $n\perp AB$.
Ми отримали, що прямі *BE*, m і n містять висоти трикутника *ABC*, а отже, перетинаються в одній точці.
Це означає, що точка перетину прямих m і n належить прямій *BE*.
Відповідь: доведено.

5. У прямокутнику 5×6 зафарбовано 19 клітинок. Доведіть, що в ньому можна обрати квадрат 2×2, у якому зафарбовано не менше трьох клітинок.

Вказівка:
Розріжемо даний прямокутник 5×6 на шість однакових фігур як показано на рисунку



Отримаємо шість п'ятиклітинкових фігур. Тоді за принципом Діріхле існує принаймні одна фігура *F* із цих 6-ти 5-клітинкових фігур в якій розфарбовано 4 клітинки, адже 19=6x3+1.

При довільному розфарбуванні 4 клітинок у середині фігури *F* «пунктирний» квадрат 2×2 містить щонайменше 3 зафарбовані клітинки

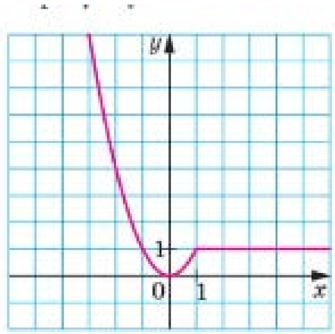
Відповідь: доведено.

Кожне завдання оцінюється 7-ма балами *м.Ужгород*
Час розв'язання 4 год.
Користування калькуляторами заборонено

II етап Всеукраїнської олімпіади з математики 2024 рік

9 клас

1. Задайте за допомогою формул функцію, графік якої зображено на рисунку.



Вказівка: очевидно, що функцію потрібно розглядати на проміжках$(-\infty; 1]$, $(1; +\infty)$. Нехай $f(x)$ – функція, графік якої зображено на рисунку.

Тоді $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{якщо } x \le 1 \\ 1, & \text{якщо } x > 1 \end{cases}$

Відповідь:$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{якщо } x \le 1 \\ 1, & \text{якщо } x > 1 \end{cases}$.

2. Знайдіть значення виразу: $\sqrt{2025 + 2\sqrt{2024}} - \sqrt{2025 - 2\sqrt{2024}}$.

Вказівка:$\sqrt{2025 + 2\sqrt{2024}} - \sqrt{2025 - 2\sqrt{2024}} = \sqrt{\left(\sqrt{2024}\right)^2 + 2\sqrt{2024} + 1} -$

$-\sqrt{\left(\sqrt{2024}\right)^2 - 2\sqrt{2024} + 1} = \sqrt{2024} + 1 - \left(\sqrt{2024} - 1\right) = 2$

Відповідь: 2.

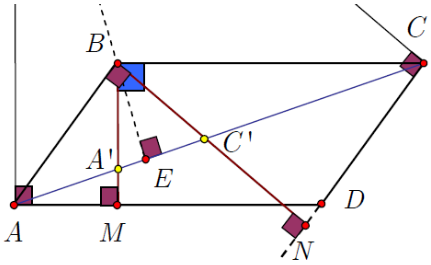
3. У прямокутному трикутнику довжини його сторін є цілими числами. Доведіть, що довжини обох катетів не можуть бути непарними числами.

Вказівка: припустимо, що довжини катетів трикутника непарні числа $(2n+1)$, $(2m+1)$. За теоремою Піфагора $c^2 = (2n+1)^2 + (2m+1)^2 = 4(n^2 + m^2 + n + m) + 2$. Тоді довжина c гіпотенузи прямокутного трикутника парне число, а це означає, що його квадрат ділиться на 4. Виходить, що 2 ділиться на 4. Протиріччя.

Відповідь: доведено.

4. З вершини тупого кута B паралелограма $ABCD$ опущено перпендикуляр BE на діагональ AC. Висоти BM і BN цього паралелограма перетинають діагональ AC у точках A' і C' відповідно. Доведіть, що $EA' \cdot EC = EC' \cdot EA$.

Вказівка:



Використаємо відоме метричне співвідношення прямокутного трикутника: висота прямокутного трикутника, проведена з вершини прямого кута, є середнім пропорційним проекцій катетів на гіпотенузу. Тоді з прямокутного трикутника $A'BC$ отримаємо, що $BE^2 = EA' \cdot EC$, з прямокутного трикутника ABC' отримаємо, що $BE^2 = EC' \cdot EA$

Отже, $EA' \cdot EC = EC' \cdot EA$

Відповідь: доведено.

5. Підряд виписано 2024 числа. Кожне з них, крім першого та останнього, дорівнює сумі двох сусідніх з ним чисел. Чому дорівнює сума всіх чисел, якщо сума двох останніх чисел дорівнює 2025?

Вказівка: нехай a – перше число і b – друге число. Тоді першими числами будуть числа $a, b, b-a, -a, -b, -b+a, a, b$. Сума перших шести чисел дорівнює нулю. Оскільки $2024 = 6 \cdot 337 + 2$, а сума двох останніх чисел дорівнює 2025, то сума всіх чисел також дорівнює 2025.

Відповідь: 2025.

Кожне завдання оцінюється 7-ма балами *м.Ужгород*

Час розв'язання 4 год.

Користування калькуляторами заборонено

II етап Всеукраїнської олімпіади з математики 2024 рік

10 клас

1. Знайдіть значення виразу: $\sqrt{1+2023\sqrt{1+2024\sqrt{1+2025\cdot 2027}}}$.

Вказівка: скористаємося рівністю $1+(n-1)(n+1)=n^2$.

Отримаємо $\sqrt{1+2023\sqrt{1+2024\sqrt{1+2025\cdot 2027}}}=\sqrt{1+2023\sqrt{1+2024\cdot 2026}}=\sqrt{1+2023\cdot 2025}=2024$

Відповідь: 2024.

2. Розв'яжіть рівняння: $x^2+y^2+1=2x\cdot\sqrt{y}+y$.

Вказівка: згрупуємо $x^2-2x\cdot\sqrt{y}+y+y^2-2y+1=0$. Отримаємо рівняння $\left(x-\sqrt{y}\right)^2+(y-1)^2=0$. Отже, $\begin{cases} x-\sqrt{y}=0, \\ y-1=0. \end{cases}$ Тоді $x=1, y=1$.

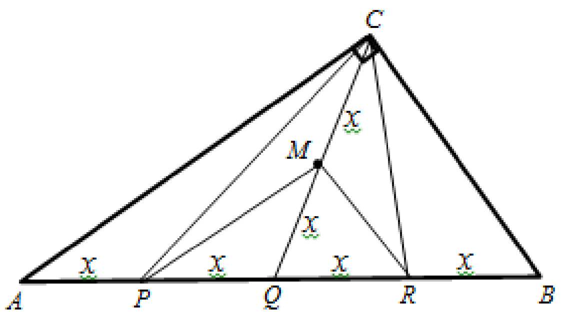
Відповідь: $x=1, y=1$.

3. Чи може сума квадратів двох непарних чисел бути точним квадратом? Відповідь обґрунтуйте.

Вказівка: за умовою задачі можемо вважати, що це числа $(2n+1)$, $(2m+1)$. Тоді $(2n+1)^2+(2m+1)^2=4(n^2+m^2+n+m)+2$. Оскільки квадрат числа при діленні на 4 не може давати остачу 2, то сума квадратів двох непарних чисел не може бути точним квадратом.

Відповідь: не може.

4. На гіпотенузі *AB* прямокутного трикутника *ABC* позначили точки *P*, *Q* та *R* так, що $AP=PQ=QR=RB=\frac{1}{4}AB$. Доведіть, що описані навколо трикутників APC та BRC кола проходять через точку *M* – середину відрізка *CQ*.



Вказівка: Нехай $x=AP=PQ=QR=RB=\frac{AB}{4}$. Покажемо, що навколо точок *A*, *C*, *M*, *P* можна описати коло. За умовою *PM* – середня лінія ΔAQC. Тому *ACMP*– трапеція. Оскільки *Q* – центр кола описаного навколо ΔABC, то $AQ=CQ=2x$ і $AP=CM$. Отже, *ACMP* – рівнобічна трапеція і тому навколо неї можна описати коло.

Аналогічно навколо точок *B*, *C*, *M*, *R* також можна описати коло.

Відповідь: доведено.

5. Дошка 7х7 розграфлена на клітинки 1х1. Дарина і Соломія грають у таку гру: по черзі довільним чином фарбують одну або дві клітинки цієї дошки у зелений колір. Виграє та дівчина, яка зафарбує останню клітинку. Першою чи другою має починати фарбування Дарина, щоб забезпечити собі виграш у цій грі ? Відповідь обґрунтуйте.

Вказівка: першою. Дарина має зафарбувати першим ходом одну клітинку. А далі, якщо Соломія зафарбує одну клітинку, то Дарина у відповідь зафарбує дві. І навпаки, якщо Соломія зафарбує дві клітинки, то Дарина у відповідь зафарбує одну.

Відповідь: першою.

Кожне завдання оцінюється 7-ма балами *м.Ужгород*
Час розв'язання 4 год.
Користування калькуляторами заборонено

II етап Всеукраїнської олімпіади з математики 2024 рік

11 клас

1. Розв'яжіть рівняння: $2025^x - 2024^x = 1$.

Вказівка:

Поділимо обидві частини рівняння на 2024^x.

Отримаємо рівняння $\left(\frac{2025}{2024}\right)^x - 1 = \left(\frac{1}{2024}\right)^x$.

Функція $f(x) = \left(\frac{2025}{2024}\right)^x - 1$ зростаюча, а функція $g(x) = \left(\frac{1}{2024}\right)^x$спадна. Тому задане рівняння має не більше одного розв'язку. Очевидно, що $x = 1$.

Відповідь: $x = 1$.

2. Довести нерівність:

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{2024^2} < 1$$

Вказівка:

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{2024^2} < \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{2023 \cdot 2024} =$$

$$= \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \dots + \frac{1}{2023} - \frac{1}{2024} = 1 - \frac{1}{2024} < 1$$

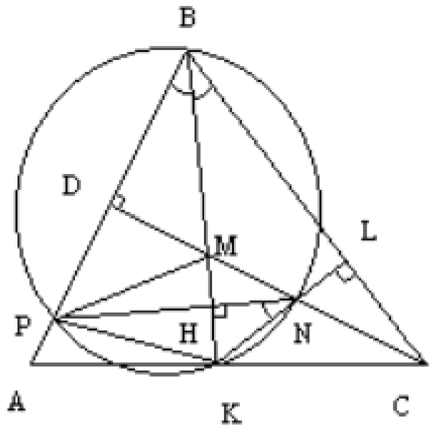
Відповідь: доведено.

3. Послідовність чисел починається з 7. Далі кожне наступне число – це сума цифр квадрата попереднього числа, збільшеного на 1. Знайдіть число, яке буде написане на 2025-му місці.

Вказівка: Виконаємо задані в умові операції. Отримаємо числа: 7 – початкове число,7^2+1=50, 5+0=5 – друге число, 5^2+1=26, 2+6=8 – третє число, 8^2+1=65, 6+5=11 – четверте число, 11^2+1=122, 1+2+2=5 – п'яте число і т.д. Помічаємо, що п'яте число дорівнює другому. Це означає, що кожне третє число повторюється. На 2025-му місці буде число 8.

Відповідь: 8.

4. Висота *CD* трикутника *ABC* перетинає бісектрису *BK* цього трикутника в точці *M*, а висоту *KL* трикутника *BKC* – в точці *N*. Коло, описане навколо трикутника *BKN* перетинає пряму *AB* в точках *B* та *P*. Довести, що трикутник *KPM* рівнобедрений.



Вказівка: $\angle KMN = \angle DMB = 90^0 - \angle DBM = 90^0 - \angle KBL = \angle MKN$. Тоді $MN = KN$. З'єднаємо точку P з *N* і позначимо через *H* точку перетину відрізків *PN* і *MK*. Оскільки кути *PBK* та *PNK* спираються на одну дугу *PK*, то вони рівні. Але $\angle PBK + \angle DMB = 90^0$, $\angle DMB = \angle MKN$, тому $\angle PNK + \angle MKN = 90^0$. Отже, $PN \perp MK$, і з рівності $\angle KMN = \angle MKN$ випливає, що $\angle PNM = \angle PNK$ У такому разі $\Delta PNM = \Delta PNK$ (за двома сторонами і кутом між ними). А отже, $PM = PK$ і трикутник KPM є рівнобедреним.

Відповідь: доведено.

5. Знайдіть усі функції $f: R \to R$ такі, що для довільних дійсних чисел x, y має місце рівність $f(x^2 - y^2) = (x - y)(f(x) + f(y))$.

Вказівка: зробимо підстановки:

$x = y$. Тоді $f(0) = 0$.

$x = -y$. Тоді $f(0) = 2x(f(x) + f(-x))$. Тому $f(-x) = -f(x)$ для всіх x. Це означає, що функція $y = f(x)$ непарна.

Замінимо y на $-y$. Тоді $f(x^2 - y^2) = (x + y)(f(x) - f(y))$.

Якщо порівняти початкову умову з отриманою, то одержимо, що $(x - y)(f(x) + f(y)) = (x + y)(f(x) - f(y))$. Після розкриття дужок та зведення подібних доданків одержимо, що $yf(x) = xf(y)$. Нехай $f(1) = k$. Підставимо $y = 1$. Одержимо, що $f(x) = kx$. Перевіркою переконуємось, що для довільного дійсного k функція $f(x) = kx$ задовольняє умову задачі.

Відповідь: $f(x) = kx$.

Кожне завдання оцінюється 7-ма балами *м.Ужгород*

Час розв'язання 4 год.

Користування калькуляторами заборонено