Завдання II етапу Всеукраїнської учнівської олімпіади з астрономії

11 клас

1. У Сумах ($\varphi = 50°55'$) в деякий день опівдні Сонце спостерігалося на висоті $62°32'$. Визначте схилення Сонця і дату спостереження.

2. Подвійна система складається з двох зір однакових розмірів, але їх температура відрізняється в 2 рази. Визначте амплітуду зміни зоряної величини, якщо нахил орбіти відсутній. В скільки разів при цьому змінюється блиск системи? Зобразіть схематично криву блиску.

3. Проникна сила телескопа 19^m. Чи можна з його допомогою зареєструвати кульове скупчення із мільйона зір подібних Сонцю, що знаходяться в сусідній галактиці на відстані 10 Мпк?

4. Оцініть густину чорної діри в центрі Галактики, якщо відомо, що навколо неї з періодом 15,2 року обертається зірка з еліптичною орбітою, яка має велику піввісь, що дорівнює 5,5 світлових діб.

Розв'язки завдань II етапу Всеукраїнської учнівської олімпіади з астрономії

11 клас

1. У Сумах ($\varphi = 50°55'$) в деякий день опівдні Сонце спостерігалося на висоті 62°32′. Визначте схилення Сонця і дату спостереження.

Розв'язок

Висота Сонця опівдні (в верхній кульмінації)

$h_в = 90° - \varphi + \delta_\odot$,

де φ – широта місця спостереження,

$\delta_\odot$ – схилення Сонця.

Звідси знаходимо:

$\delta_\odot = h_в + \varphi - 90° = 62°32' + 50°55' - 90° = 23°27'$.

Таке схилення Сонця в день літнього сонцестояння, тобто дата спостереження 21 червня.

2. Подвійна система складається з двох зір однакових розмірів, але їх температура відрізняється в 2 рази. Визначте амплітуду зміни зоряної величини, якщо нахил орбіти відсутній. В скільки разів при цьому змінюється блиск системи? Зобразіть схематично криву блиску.

Розв'язок

Світність зорі L пропорційна $T^4 \cdot R^2$ (або може бути знайдена з використанням закону Стефана-Больцмана: $L = \varepsilon S = \sigma T^4 \cdot 4\pi R^2$), звідки для відношення світностей маємо:

$$\frac{L_2}{L_1} = \frac{T_2^4 \cdot R_2^2}{T_1^4 \cdot R_1^2} = \frac{T_2^4}{T_1^4} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^4 = 2^4 = 16$$

(розміри зір за умовою однакові).

Оскільки відстані від спостерігача до обох зір однакові, їх блиски також відрізняються в 16 разів:

$$\frac{E_2}{E_1} = 16$$

Сумарний блиск затемнювано-змінної зорі в максимумі буде дорівнювати сумі блисків:

$E_{max} = E_1 + E_2 = E_1 + 16E_1 = 17E_1$.

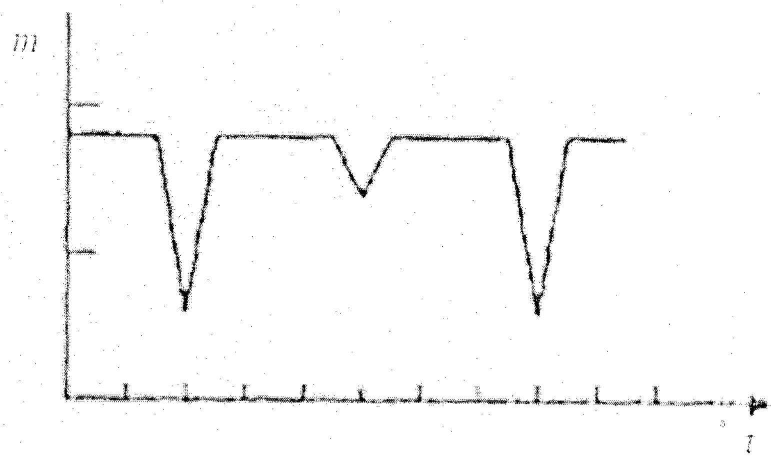
В мінімумі блиску яскравий компонент повністю невидимий,

$E_{min} = E_1$.

Отже, блиск системи змінюється в 17 разів. Тоді згідно з формулою Погсона

$$\Delta m = m_{max} - m_{min} = -2{,}5 lg \frac{E_{max}}{E_{min}} = -2{,}5 \cdot lg 17 = -3{,}1^m.$$

Між двома основними мінумумами блиску буде спостерігатись додатковий мінімум малої глибини (він відповідає проміжку, коли менш яскравий компонент невидимий за яскравішим). Графік зміни блиску схематично має вигляд:



3. Проникна сила телескопа 19^m. Чи можна з його допомогою зареєструвати кульове скупчення із мільйона зір подібних Сонцю, що знаходяться в сусідній галактиці на відстані 10 Мпк?

Розв'язок.

За формулою Погсона

$lg\frac{E_c}{E_\odot} = 0{,}4(M_\odot - M_c)$,

де E_c, M_c – блиск і абсолютна зоряна величина скупчення,

$E_\odot$, $M_\odot$ – те ж для Сонця.

Світність скупчення

$E_c = 10^6 E_\odot$.

Абсолютна зоряна величина Сонця $M_\odot \approx 5^m$, тоді

$M_\odot - M_c = 2{,}5 lg\frac{E_c}{E_\odot}$

$M_c = M_\odot - 2{,}5 lg \frac{E_c}{E_\odot} = 5 - 2{,}5 lg\, 10^6 = 5 - 15 = -10^m$.

Зв'язок видимої і абсолютної зоряних величин скупчення:

$M_c = m + 5 - 5 \lg r$,

де r – відстань до скупчення в парсеках. Звідси

$m = M_c - 5 + 5 \lg r = -10 - 5 + 5 \lg 10^7 = 20^m$,

отже, скупчення в телескоп не видно.

4. Оцініть густину чорної діри в центрі Галактики, якщо відомо, що навколо неї з періодом 15,2 року обертається зірка з еліптичною орбітою, яка має велику піввісь, що дорівнює 5,5 світлових діб.

Розв'язок

Запишемо узагальнений третій закон Кеплера,

$$\frac{T^2(M+m_3)}{a^3}=\frac{4\pi^2}{G}$$

Нехтуючи масою зорі порівняно з масою чорної діри, одержимо:

$$M=\frac{4\pi^2a^3}{GT^2}.$$

Радіус чорної діри знаходимо з умови, що друга космічна швидкість на її поверхні дорівнює швидкості світла:

$$v_2=\sqrt{\frac{2GM}{R}}=c,$$

звідки

$$\frac{2GM}{R}=c^2$$

$$R=\frac{2GM}{c^2}=\frac{2G}{c^2}\cdot\frac{4\pi^2a^3}{GT^2}=\frac{8\pi^2a^3}{c^2T^2}.$$

Вважаючи діру сферичною, знаходимо її об'єм:

$$V=\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{4}{3}\pi\cdot\frac{8G^3M^3}{3c^6}=\frac{32\pi G^3M^3}{3c^6}.$$

Густина речовини чорної діри

$$\rho=\frac{M}{V}=\frac{M}{\frac{32\pi G^3M^3}{3c^6}}=\frac{3c^6}{32\pi G^3M^2}=\frac{3c^6}{32\pi G^3\cdot\frac{16\pi^4a^6}{G^2T^4}}=\frac{3c^6T^4}{512\pi^4a^6G}.$$

Враховуючи, що

T=15,2 року=$4{,}80\cdot10^8$ секунд,

a=$5{,}5\cdot24\cdot3600\cdot c\approx4{,}75\cdot10^5\cdot c$ (м, в цьому виразі c – швидкість світла),

знаходимо:

$$\rho=\frac{3c^6\cdot4{,}80^4\cdot10^{32}}{512\cdot3{,}14^5\cdot4{,}75^6\cdot10^{30}\cdot c^6\cdot6{,}67\cdot10^{-11}}\approx1{,}3\cdot10^6\ (\text{кг/м}^3)$$

Завдання II етапу Всеукраїнської учнівської олімпіади з астрономії

10 клас

1. 21 березня в справжній полудень довжина тіні від вертикально розташованого стовпа дорівнювала висоті стовпа. Визначити широту місця спостереження.

2. З якої планети Сонячної системи можна побачити неозброєним оком супутники двох сусідніх планет? Відповідь обґрунтуйте.

3. У подвійної зірки річний паралакс становить 0,05", велика піввісь видимої орбіти дорівнює 2,0", а період обертання компонентів 100 років. Знайдіть суму мас зірок і масу кожної зірки, якщо зірки знаходяться від центру мас на відстанях, які відносяться як 4:1.

4. Паралакс Веги дорівнює 0,12", а зоряна величина 0^m. На якій відстані від Сонця поблизу прямої Сонце–Вега повинен знаходитись спостерігач, щоб ці дві зірки були для нього однаково яскравими? Видима зоряна величина Сонця дорівнює $-26{,}8^m$.

Розв'язки завдань II етапу Всеукраїнської учнівської олімпіади з астрономії
10 клас

1. 21 березня в справжній полудень довжина тіні від вертикально розташованого стовпа дорівнювала висоті стовпа. Визначити широту місця спостереження.

Розв'язок

21 березня – день весняного рівнодення. Сонця в цей день проходить точку весняного рівнодення, яка є точкою перетину екліптики та небесного екватора. Його схилення в цей день дорівнює нулю: $\delta=0$. Тоді висота Сонця в верхній кульмінації (в справжній полудень)

$h=90°-\varphi+\delta=90°-\varphi$.

Оскільки довжина тіні стовпа дорівнює його висоті, то кутова висота Сонця в цей момент $h=45°$. Отже,

$\varphi=90°-h=90°-45°=45°$.

2. З якої планети Сонячної системи можна побачити неозброєним оком супутники двох сусідніх планет? Відповідь обґрунтуйте.

У планети повинно бути дві сусідні планети. Тому Меркурій та Нептун виключаються. Крім того, у сусідніх планет повинні бути супутники. Отже, це не Венера (бо у Меркурія супутників немає) і не Земля (у Венери теж немає супутників).

Для спостереження неозброєним оком супутник повинен бути досить великим. Тому як супутники-претенденти розглядаємо Місяць, Галілеєві супутники Юпітера, супутник Сатурна Титан і Нептуна Тритон. Супутники Марса з Юпітера побачити не можна (оскільки їх не видно і з Землі, яка ближче до Марса), в Урана досить великих супутників немає. Тому Юпітер (сусідні Марс і Сатурн) та Сатурн (сусідні планети Юпітер та Уран) також виключаються.

Залишається дві планети: Марс і Уран.

Чим ближче планета до Сонця, тим яскравіші її супутники. Радіуси орбіт планет із збільшенням порядкового номера планети дуже швидко ростуть, тому й мінімальні відстані між сусідніми планетами теж збільшуються з віддаленням від Сонця. Крім того, Тритон – найменший серед великих супутників, і побачити його з Урана було б складно. Отже, шуканою планетою є Марс, з якого неозброєним оком видно Місяць біля Землі та Галілеєві супутники Юпітера.

3. У подвійної зірки річний паралакс становить 0,05", велика піввісь видимої орбіти дорівнює 2,0", а період обертання компонентів 100 років. Знайдіть суму мас зірок і масу кожної зірки, якщо зірки знаходяться від центру мас на відстанях, які відносяться як 4:1.

За річним паралаксом знаходимо відстань до зірки:

$$r = \frac{1}{\pi} = \frac{1}{0{,}05''} = 20 \text{ пк} = 20 \cdot 206265 \text{ а. о.}$$

Знаючи відстань та кутовий розмір великої півосі, знаходимо її лінійний розмір:

$$a = r \cdot \alpha = 20 \cdot 206265 \text{а. о.} \cdot \frac{2''}{206265''} = 40 \text{ а. о.}$$

Для знаходження суми мас зірок використовуємо узагальнений третій закон Кеплера, порівнюючи рух зірок навколо спільного центру мас з рухом Землі навколо Сонця:

$$\frac{T^2(M_1 + M_2)}{a^3} = \frac{T_0^2(M_\odot + M_\oplus)}{a_0^3}$$

звідки, нехтуючи масою Землі порівняно з масою Сонця і враховуючи параметри руху Землі (a_0=1 а.о., T_0=1 рік), знаходимо:

$$M_1 + M_2 = \frac{T_0^2 a^3}{T^2 a_0^3} M_\odot = \frac{1^2 \cdot 40^3}{100^2 \cdot 1^3} M_\odot = 6{,}4\ M_\odot$$

Відношення відстаней зірок від центру мас обернено пропорційне їх масам:

$\frac{M_1}{M_2} = \frac{a_1}{a_2} = \frac{1}{4}$,

звідки

$M_2 = 4M_1$,

$M_1 + M_2 = M_1 + 4M_1 = 5M_1 = 6{,}4M_\odot$,

$M_1 = \frac{6{,}4}{5} M_\odot = 1{,}28M_\odot$,

$M_2 = 4M_1 = 4 \cdot 1{,}28M_\odot = 5{,}12M_\odot$.

4. Паралакс Веги дорівнює 0,12", а зоряна величина 0^m. На якій відстані від Сонця поблизу прямої Сонце–Вега повинен знаходитись спостерігач, щоб ці дві зірки були для нього однаково яскравими? Видима зоряна величина Сонця дорівнює $-26{,}8^m$.

Розв'язок

За річним паралаксом знаходимо відстань до Веги:

$$r = \frac{1}{\pi} = \frac{1}{0{,}12''} \approx 8{,}3 \text{ пк} .$$

Якщо спостерігач знаходиться на прямій Сонце–Вега на відстані r_1 від Сонця, то відстань від нього до Веги складатиме $r_2=r-r_1$. Якщо зорі однаково яскраві, то видимі зоряні величини їх будуть однакові.

Видима зоряна величина Сонця для спостерігача на Землі маємо:

$m_\odot = M_\odot - 5 + 5 \lg a_0$,

де $M_\odot$ – абсолютна зоряна величина Сонця,

$a_0 = 1 \text{ а. о.} = \frac{1}{206256}$ пк – відстань від Землі до Сонця.

Для спостерігача на відстані r_1 від Сонця

$m_{\odot 1} = M_\odot - 5 + 5 \lg r_1$.

Віднімаючи попередню рівність, одержимо:

$$m_{\odot 1} - m_\odot = M_\odot - 5 + 5 \lg r_1 - M_\odot + 5 + 5 \lg a_0 = 5(\lg r_1 - \lg a_0),$$

$$m_{\odot 1} = m_\odot + 5(\lg r_1 - \lg a_0) = m_\odot + 5 \lg \frac{r_1}{a}.$$

Аналогічно для Веги при спостереженні з Землі

$m = M - 5 + 5\lg r$,

з точки на відстані r_1 від Сонця

$m_1 = M - 5 + 5\lg r_2 = M - 5 + 5\lg(r - r_1)$,

звідки

$m_1 = m + 5\lg(r - r_1) - 5\lg r = m + 5\lg\frac{r-r_1}{r}$

Тоді для розглянутої точки

$m_\odot + 5\lg\frac{r_1}{a_0} = m + 5\lg\frac{r-r_1}{r}$

$m - m_\odot = 5\lg\frac{r_1}{a_0} - 5\lg\frac{r-r_1}{r} = 5\left(\lg\frac{r_1}{a_0} - \lg\frac{r-r_1}{r}\right) = 5\lg\left(\frac{r_1}{a_0}\cdot\frac{r}{r-r_1}\right)$,

$\lg\left(\frac{r_1}{a_0}\cdot\frac{r}{r-r_1}\right) = \frac{m-m_\odot}{5}$,

$\frac{r_1}{a_0}\cdot\frac{r}{r-r_1} = 10^{\frac{m-m_\odot}{5}}$

$\frac{r_1}{r-r_1}\cdot\frac{r_1}{a_0} = 10^{\frac{m-m_\odot}{5}}$

$\frac{r_1}{8{,}3-r_1}\cdot\frac{8{,}3}{\frac{1}{206265}} = 10^{\frac{0-(-26{,}8)}{5}}$

$\frac{r_1}{8{,}3-r_1} = \frac{10^{5{,}36}}{8{,}3\cdot 206265} = 0{,}134$,

$r_1 = 1{,}11 - 0{,}134r_1$,

$1{,}134r_1 = 1{,}11$,

$r_1 = \frac{1{,}11}{1{,}134} \approx 0{,}98$ пк.