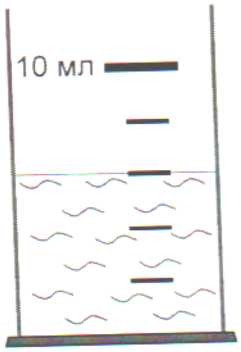
Розв'язки завдань II етапу Всеукраїнської олімпіади з фізики
7 клас

Задача 1



Учень помітив мензурку з водою, у яку капала вода з крану. Спостерігаючи за краплями, учень порахував, що за 50 секунд від крана відірвалося 25 крапель, а рівень води в мензурці піднявся на одну поділку. Який об'єм краплі води? Через який час вода повністю заповнить мензурку, якщо її об'єм 250 мл?

Розв'язок

За рисунком визначимо ціну поділки мензурки та початковий об'єм води: $C = \frac{10\ мл}{5} = 2$ мл, $V_0 = 6$ мл. Оскільки $n = 25$ крапель підняли рівень води на одну поділку, то об'єм води збільшився на значення C ціни поділки мензурки. Тоді об'єм однієї краплі дорівнює $V_{кр} = \frac{C}{n} = \frac{2\ мл}{25} = 0{,}08$ мл.

Будемо вважати, що вода крапає рівномірно, тобто за однаковий інтервал часу падає однакова кількість крапель. Швидкість витікання води: $v = \frac{C}{t}$ де t – час витікання 25 крапель. Тобто $v = \frac{2\ мл}{50\ с} = 0{,}04\ \frac{мл}{с}$

Від початку спостереження до повного заповнення мензурки повинно накапати води об'ємом $V_1 = V - V_0$, де V – об'єм мензурки.

Час заповнення мензурки:

$$t_1 = \frac{V_1}{v} = \frac{V - V_0}{v}$$

$$t_1 = \frac{250\ мл - 6\ мл}{0{,}04\frac{мл}{с}} = \frac{244\ мл}{0{,}04\frac{мл}{с}} = 6100\ с = 101\ хв\ 40\ с = 1\ год\ 41\ хв\ 40с.$$

Задача 2

Велодром для тренування спортсменів має вигляд квадрата зі стороною a = 1500 м. Два велосипедисти розпочали своє тренування, одночасно стартуючи з різних кутів квадрата, що примикають до однієї сторони зі швидкостями $\upsilon_1 = 36$ км/год та $\upsilon_2 = 54$ км/год (див. рис.). Визначте, через який час з моменту старту відбудеться їхня перша зустріч, друга та третя.

Орієнтовний розв'язок

υ_1 = 36 км/год = 10м/с, υ_2 = 54 км/год = 15м/с. Нехай до їхньої першої зустрічі перший велосипедист проїхав шлях l_1, другий - l_2. вони перший раз зустрінуться через час t_1, тому $l_1 = \upsilon_1 t_1$, $l_2 = \upsilon_2 t_1$. Згідно рисунку $l_1 + l_2 = 3a$,

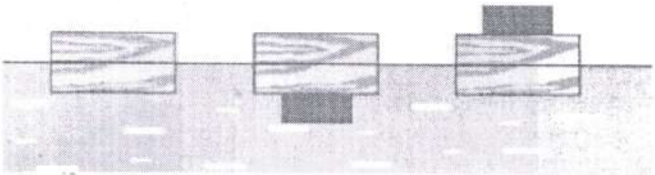
тому $3a = \upsilon_1 t_1 + \upsilon_2 t_1$, звідси $t_1 = \; = 180$ с = 3 хв.
Після першої зустрічі вони починають рухатись зі своїми швидкостями у протилежних напрямках і до другої зустрічі вони пройдуть загальний шлях 4а, тому вони зустрінуться через $\Delta t = \; = 240$ с = 4 хв, а від початку руху до другої зустрічі пройде час $t_2 = t_1 + \Delta t = 7$хв.

Очевидно, що третя зустріч відбудеться також через $\Delta t = 4$ хв після другої, тому з моменту старту до третьої зустрічі пройде час $t_3 = t_2 + \Delta t = 11$ хв

Розв'язки завдань II етапу Всеукраїнської олімпіади з фізики
(2020-2021 навчальний рік)
8 клас

Задача 1

Дерев'яний брусок плаває у воді, занурившись на 10 см. Якщо знизу бруска прикріпити вантаж певної маси, то брусок зануриться у воду на глибину 14 см. На скільки брусок буде занурений у воду, якщо цей вантаж покласти на нього зверху? Густина матеріалу вантажу дорівнює 5000 кг/м^3, густина води – 1000 кг/м^3.



Розв'язок

Позначимо: площа грані бруска – S, маса бруска – m, маса вантажу – $m_в$, об'єм вантажу – $V_в$.

Ситуація 1. Запишемо умову плавання бруска у воді: $mg = \rho gV$ або $m = \rho Sh_1$ (1), де $h_1 = 10$ см – глибина занурення бруска, ρ – густина води.

Ситуація 2. Запишемо умову плавання бруска у воді, коли вантаж прикріплений знизу бруска: $(m + m_в)g = \rho g(V + V_в)$ або $m + m_в = \rho(Sh_2 + V_в)$, де $h_2 = 14$ см – глибина занурення бруска в ситуації 2.

Якщо врахувати, що об'єм вантажу $V_в$ дорівнює $V_в = \frac{m_в}{\rho_в}$, де $\rho_в$ – густина матеріалу вантажу, то $m + m_в = \rho(Sh_2 + \frac{m_в}{\rho_в})$.

Звідси, $m_в\left(1 - \frac{\rho}{\rho_в}\right) = \rho Sh_2 - m$ (2).

Ситуація 3. Запишемо умову плавання бруска у воді, коли вантаж прикріплений зверху на бруску: $(m + m_в)g = \rho gV$ або $m + m_в = \rho Sh_3$ (3), де $h_3 =$ – глибина занурення бруска в ситуації 3.

Підставимо вираз (1) у вираз (2): $m_в\left(1 - \frac{\rho}{\rho_в}\right) = \rho Sh_2 - \rho Sh_1$. Звідси $m_в = \frac{\rho_в \rho S(h_2 - h_1)}{\rho_в - \rho}$ (4)

Підставимо вирази (1) та (4) у вираз (3):

$$\rho Sh_1 + \frac{\rho_в \rho S(h_2 - h_1)}{\rho_в - \rho} = \rho Sh_3$$

Звідси $h_3 = h_1 + \frac{\rho_в(h_2 - h_1)}{\rho_в - \rho} = \frac{h_1(\rho_в - \rho) + \rho_в(h_2 - h_1)}{\rho_в - \rho} = \frac{\rho_в h_2 - \rho h_1}{\rho_в - \rho}$;

$$h_3 = \frac{5000\frac{кг}{м^3}\cdot 0{,}14\ м - 1000\frac{кг}{м^3}\cdot 0{,}1\ м}{5000\frac{кг}{м^3} - 1000\frac{кг}{м^3}} = 0{,}15\ м.$$

Задача 2

У сполучені посудини з внутрішніми діаметрами 3 см і 7 см налили воду. Визначити, наскільки зміниться рівень води в посудині більшого діаметра, якщо у вужчу посудину налити 200 $см^3$ олії густиною 0,8 $\frac{г}{см^3}$. Густина води 1 $\frac{г}{см^3}$.

Розв'язок

Позначимо: внутрішній діаметр вужчої посудини – $d_1 = 0{,}03$ м;

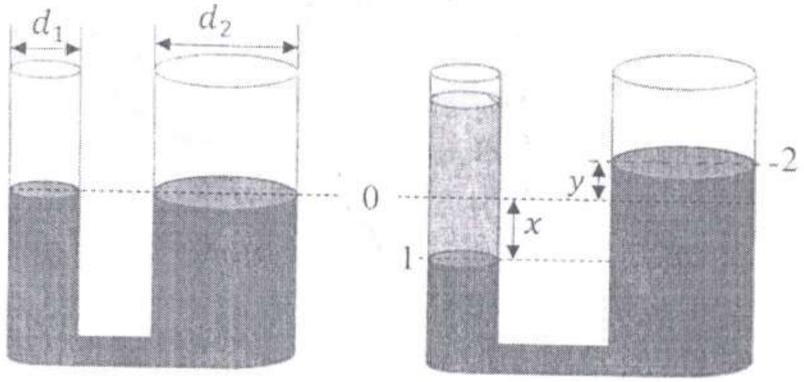
внутрішній діаметр ширшої посудини – $d_2 = 0{,}07$ м;

об'єм олії – $V_0 = 200\ см^3 = 0{,}0002\ м^3$;

густина олії – $\rho_o = 0{,}8\ \frac{г}{см^3} = 800\frac{кг}{м^3}$;

густина води – $\rho = 1\frac{г}{см^3} = 1000\frac{кг}{м^3}$.

Зобразимо рівні води в посудинах. Початковий рівень показано чорною пунктирною лінією з позначкою «0».



Посудина з водою

Посудина з водою та олією

Після доливання олії у вужчу посудину рівень води знизився на величину x до рівня з позначкою «1», а у широкій посудині – піднявся на величину y до рівня з позначкою «2».

Кількість води в сполученій посудині не змінилася, тому об'єм води V_1, який витік з вужчої посудини, повинен дорівнювати об'єму води V_2, яка перелилися в ширшу посудину: $V_1 = V_2$ (1).

Щоб визначити об'єми цих стовпчиків води, згадаємо, що вони утворюють геометричні фігури циліндри. Об'єм циліндра розраховується як $V = Sh$, де $S = \pi r^2 = \frac{\pi d^2}{4}$ – площа основи циліндра, h – його висота.

Отже, $V_1 = x \cdot \frac{\pi d_1^2}{4}$, $V_2 = y \cdot \frac{\pi d_2^2}{4}$.

Підставимо вирази у вираз (1): $x \cdot \frac{\pi d_1^2}{4} = y \cdot \frac{\pi d_2^2}{4}$. Звідси $x = y \cdot \frac{d_2^2}{d_1^2}$ (2).

Запишемо умову рівності тисків для рівня води 1: $p_O = p_В$.

У вужчому коліні тиск створюється олією, тому $p_O = \rho_o g h_o$, де ρ_o – густина олії, h_o – висота стовпчика олії.

Висоту стовпчика олії визначимо з її об'єму: $V_O = S_1 h_o = \frac{\pi d_1^2}{4} h_o \rightarrow h_o = \frac{4V_O}{\pi d_1^2}$. Тоді тиск олії – $p_O = \rho_o g \frac{4V_O}{\pi d_1^2}$ (3).

У ширшому коліні тиск створюється стовпчиком води: $p_B = \rho g(x + y)$ (4).
Прирівняємо вирази (3) та (4) та урахуємо вираз (2):

$$\rho_o g \frac{4V_O}{\pi d_1^2} = \rho g(x + y);$$

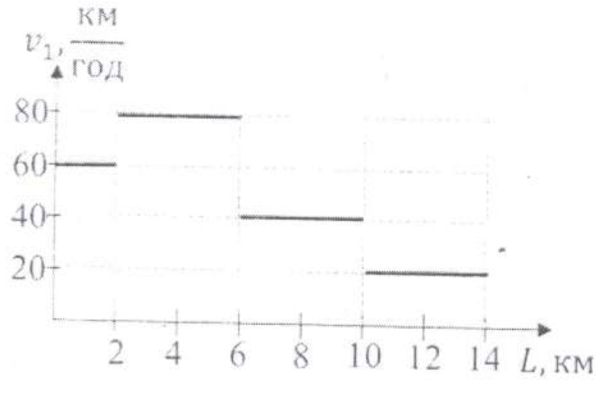
$$\rho_o g \frac{4V_O}{\pi d_1^2} = \rho g\left(y \cdot \frac{d_2^2}{d_1^2} + y\right).$$

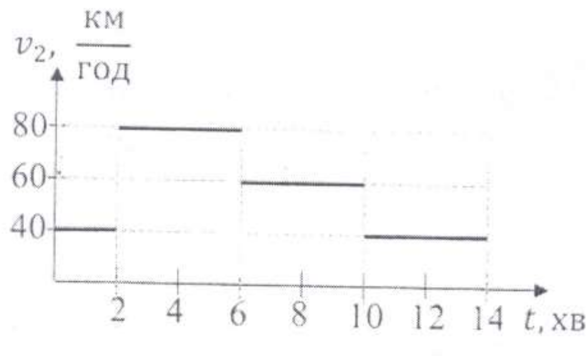
Звідси, $y = \frac{4\rho_o V_O}{\rho\pi(d_1^2 + d_2^2)}$.

$$y = \frac{4 \cdot 800 \frac{кг}{м^3} \cdot 0{,}0002\ м^3}{1000 \frac{кг}{м^3} \cdot 3{,}14 \cdot ((0{,}03\ м)^2 + (0{,}07\ м)^2)} \approx 0{,}035\ м = 3{,}5\ см.$$

Задача 3

Дві машини одночасно почали рух назустріч один одному по прямій дорозі з двох населених пунктів. Реєстратор першої машини записує значення швидкості в залежності від пройденого шляху. Реєстратор другої – фіксує значення швидкості в залежності від часу руху. Покази реєстраторів наведені на графіках. Через 10 хв машини проїхали один повз одного. Яка відстань між машинами буде через 2 хвилини після зустрічі?





Розв'язок

З графіка залежності швидкості другого автомобіля від часу руху видно, що після зустрічі другий автомобіль рухався з швидкістю $v_2 = 40\ \frac{км}{год}$. За час $t = 2$ хв $= \frac{1}{30}$ год він проїхав від місця зустрічі шлях:

$$L_2 = v_2 t = 40\ \frac{км}{год} \cdot \frac{1}{30}\ год = \frac{4}{3}\ км \approx 1{,}3\ км.$$

Щоб визначити швидкість першого після зустрічі, необхідно визначити його шлях, який він проїхав до зустрічі.

На першій ділянці: $t_1 = \frac{L_1}{v_1} = \frac{2\text{ км}}{60\frac{\text{км}}{\text{год}}} = \frac{1}{30}\text{год} = 2\text{ хв}.$

На другій ділянці: $t_2 = \frac{L_2}{v_2} = \frac{4\text{ км}}{80\frac{\text{км}}{\text{год}}} = \frac{1}{20}\text{год} = 3\text{ хв}.$

На третій ділянці: $t_3 = \frac{L_3}{v_3} = \frac{4\text{ км}}{40\frac{\text{км}}{\text{год}}} = \frac{1}{10}\text{год} = 6\text{ хв}.$

На перших трьох ділянках автомобіль рухався час:
$t' = t_1 + t_2 + t_3 = 2\text{ хв} + 3\text{ хв} + 6\text{ хв} = 11\text{ хв}.$

Оскільки до зустрічі автомобілі рухалися 10 хв, то перший автомобіль у момент зустрічі знаходився на третій ділянці, й після зустрічі продовжив рух з швидкістю $v_{13} = 40\frac{\text{км}}{\text{год}}$ впродовж $t'_{13} = 1\text{ хв}$, проїхавши шлях $L_{13} = v_{13}\,t'_{13} = 40\frac{\text{км}}{\text{год}}\cdot 1\text{ хв} = 40\frac{\text{км}}{\text{год}}\cdot\frac{1}{60}\text{год} = \frac{2}{3}\text{км}$. Потім перший автомобіль рухався $t'_{14} = 1\text{хв}$ з швидкістю $v_{14} = 20\ \frac{\text{км}}{\text{год}}$, подолавши шлях $L_{14} = v_{14}\,t'_{14} = 20\frac{\text{км}}{\text{год}}\cdot 1\text{ хв} = 20\frac{\text{км}}{\text{год}}\cdot\frac{1}{60}\text{год} = \frac{1}{3}\text{км}.$

Загальний шлях першого автомобіля після зустрічі:

$$L_{14} = L_{13} + L_{14} = \frac{2}{3}\text{км} + \frac{1}{3}\text{км} = 1\text{ км}.$$

Отже, відстань між автомобілями через 2 хвилини після зустрічі дорівнюватиме $S = L_{14} + L_2 = 1\text{ км} + 1{,}3\text{ км} = 2{,}3\text{ км}.$

Задача 4

У калориметрі міститься вода масою 200 г при температурі 30 °C. У воду поклали шматок льоду масою 10 г при температурі −10 °C. Яка температура встановиться в калориметрі, якщо його теплоємність 100 $\frac{Дж}{°C}$? Питома теплоємність води 4200 $\frac{Дж}{кг \cdot °C}$, питома теплоємність льоду 2100 $\frac{Дж}{кг \cdot °C}$, питома теплота плавлення льоду 330 $\frac{кДж}{кг}$.

Дано:

$m = 200 г = 0{,}2 кг$

$t_0 = 30°C$

$m_л = 10 г = 10 \cdot 10^{-3} кг$

$t_{0л} = -10°C$

$c_к = 100 \frac{Дж}{°C}$

$c_в = 4200 \frac{Дж}{кг °C}$

$c_л = 2100 \frac{Дж}{кг °C}$

$\lambda = 330 \frac{кДж}{кг} = 330 \cdot 10^3 \frac{Дж}{кг}$

$\Delta t - ?$

$Q_1^+ + Q_2^+$

$Q_3^- + Q_4^-$

$Q_1^+ = c_л m_л (t - t_{0л})$

$Q_2^+ = \lambda m_л$

$Q_3^- = c_в m_в (t - 0)$

$Q_4^- = c_к (t - 0)$

$\Delta Q = (Q_3 + Q_4) - (Q_1 + Q_2)$

$Q_3^- + Q_4^- = 28200 Дж$

$Q_1^+ + Q_2^+ = 3510 Дж.$

$\Delta Q = (m_л + m_в) c_в \cdot \Delta t$

$\Delta t = 25°C.$

Завдання II етапу
Всеукраїнської олімпіади школярів з фізики
9 клас

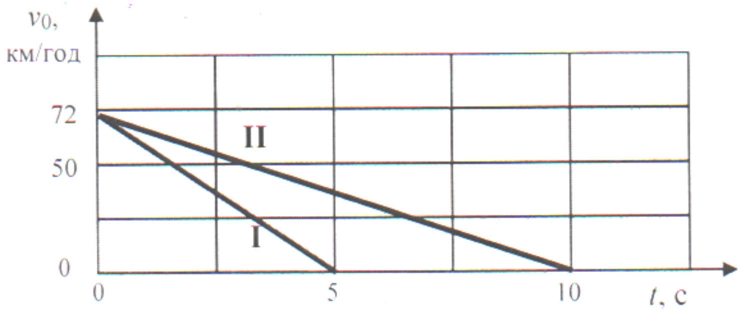
Задача 1.

На графіку зображено залежність швидкості автомобіля при гальмування на сухому асфальті та на засніженому.

1) Визначте гальмівний шлях в обох випадках та порівняйте їх.

2) Вкажіть який графік відповідає гальмуванню на сухому асфальті, а який на засніженому.

3) Поясніть отриманий результат та обґрунтуйте причину різниці між обома шляхами.



Розв'язок

1) З графіка маємо, що v_0=72 км/год = 20 м/с, t_I=5с, t_{II}=10с. Кінцева швидкість v=0 для обох випадків

Спосіб 1.

Задачу розв'язуємо графічно. Беремо до уваги, що шлях – це площа під графіком залежності $v(t)$. Тоді

$$S_I = \frac{1}{2}\ v_0 \cdot t_I;\quad S_{II} = \frac{1}{2}\ v_0 \cdot t_{II}$$

$$S_I = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 5 = 50\ (м);\quad S_{II} = \frac{1}{2} 20 \cdot 10 = 100\ (м)$$

$$S_{II} = 2 \cdot S_I$$

Спосіб 2.

Задачу розв'язуємо аналітично. Використовуємо формулу для шляху

$$S_I = v_0 \cdot t_I + \frac{a_I t_I^2}{2},\ S_{II} = v_0 \cdot t_I + \frac{a_{II} t_{II}^2}{2}$$

$$a_I = \frac{v - v_0}{t_I} = \frac{0-20}{5} = -4\ (м/с^2)$$

$$a_{II} = \frac{v - v_0}{t_{II}} = \frac{0-20}{10} = -2\ (м/с^2)$$

$$S_I = 20 \cdot 5 - \frac{4 \cdot 5 \cdot 5}{2} = 50\ (м),\ S_{II} = 20 \cdot 10 - \frac{2 \cdot 10 \cdot 10}{2} = 100\ (м)$$

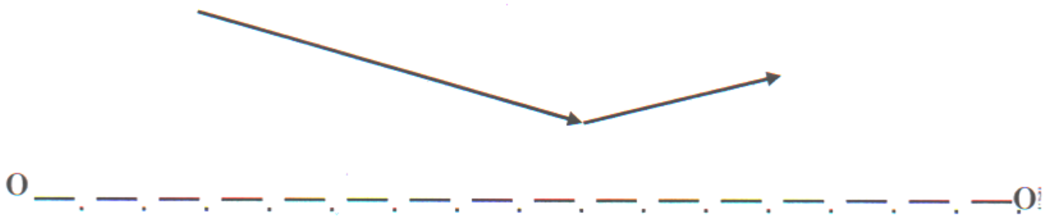
$$S_{II} = 2 \cdot S_I$$

2) Графік I відповідає гальмуванню на сухому асфальті, а II – на засніженому, оскільки гальмівний шлях на слизькій дорозі більший.

3) Гальмівний шлях на слизькій дорозі більший, тому що **коефіцієнт тертя** між поверхнею засніженої дороги і колесами автомобіля значно менший, ніж у випадку сухої дороги.

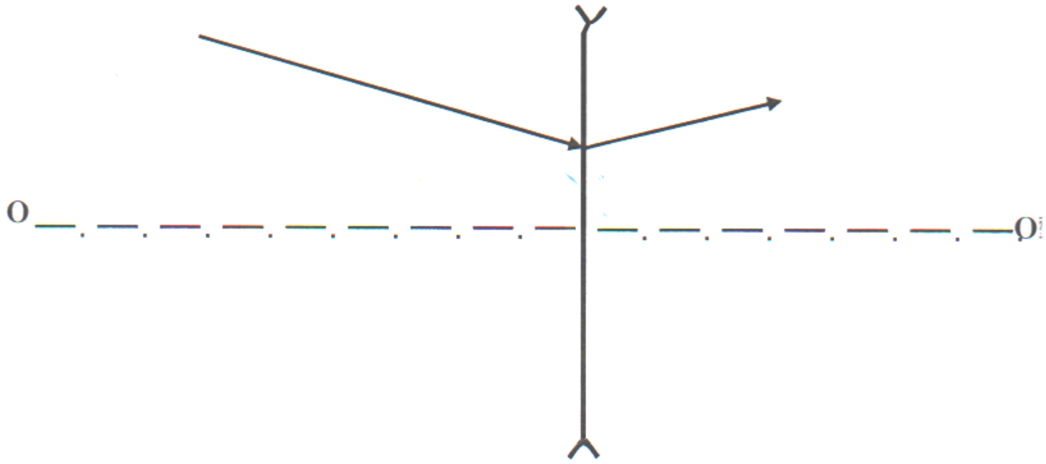
Задача 2.

На рисунку зображено хід променю через тонку лінзу. За допомогою геометричної побудови знайдіть положення лінзи, її фокусів та зобразіть їх на рисунку. OO′ - оптична вісь

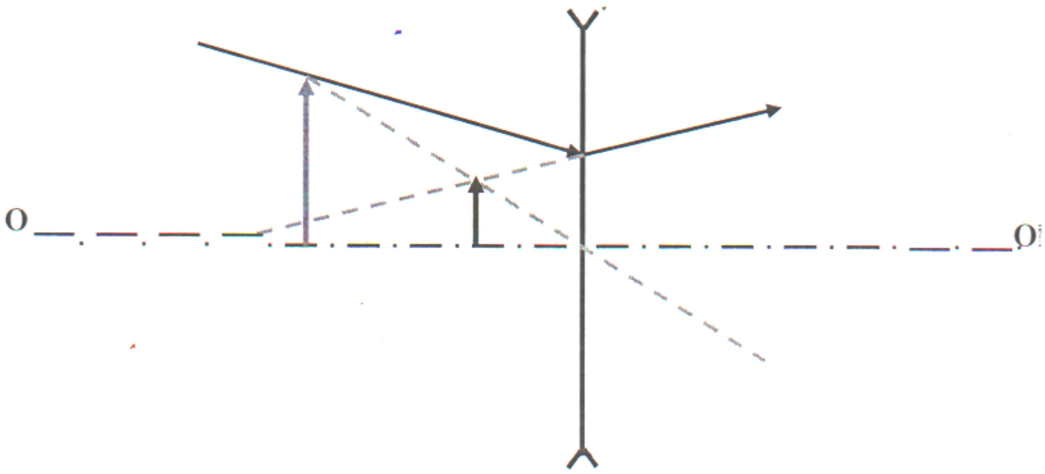


<u>Розв'язок</u>

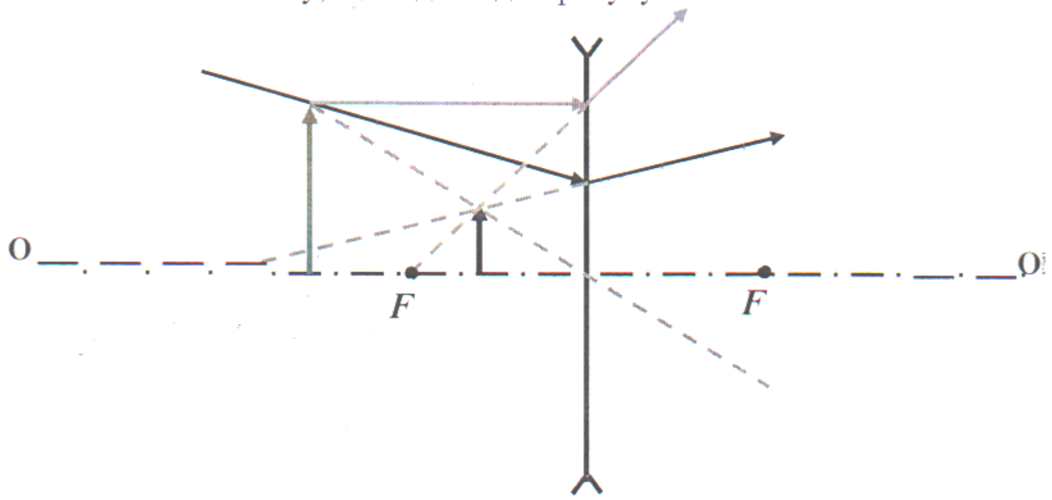
Лінза розміщена перпендикулярно до оптичної осі і проходить через точку, в якій промінь зазнає заломлення. Враховуючи характер заломлення, лінза – розсіювальна.



Нарисуємо довільний об'єкт, зображення якого в розсіювальній лінзі може дати такий хід променів. Нарисуємо блакитним кольором промінь, який проходить через оптичну вісь, та продовження заломленого променю. Там, де вони перетинаються, буде зображення об'єкта (уявне, зменшене) (темно синій колір):



Використовуючи зелений колір, проведемо промінь від об`єкта до лінзи, який паралельний до оптичної осі. Далі проведемо промінь, який проходить через вершину зображення і є продовженням заломленого. Перетин цього променю з оптичною віссю дає точку, що відповідає фокусу.

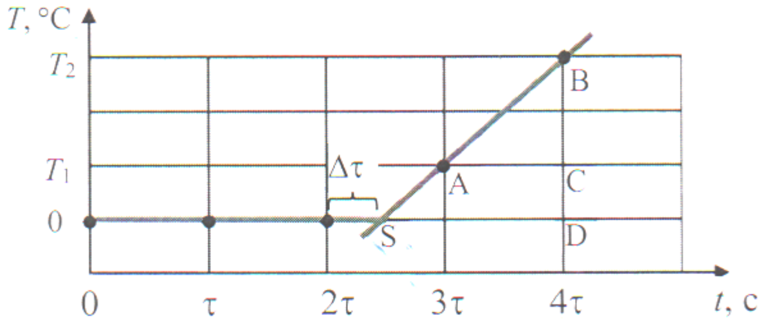


Задача 3.

У калориметр, де міститься вода з льодом за температури 0°C, помістили нагрівач потужності P. Через кожен проміжок часу τ вимірюють температуру води в посудині, починаючи з моменту поміщення нагрівача в посудину. Внаслідок перших трьох вимірювань отримали однакову температуру. В результаті четвертого отримали T_1, а п'ятого – T_2. Знайдіть масу води та масу льоду в початковий момент часу. Питома теплоємність води дорівнює c, а теплота плавлення дорівнює λ.

Розв'язок

Проілюструємо процес вимірювання графічно. Те, що перші три вимірювання показали однакову температуру означає, що протягом цього часу відбувалось танення льоду. Після того, як весь лід розтанув, уся енергія нагрівача витрачалась на збільшення внутрішньої енергії води, тобто її температури. Проте, точний момент часу, коли закінчилось танення льоду, невідомий. Ми лиш знаємо, що він між 2τ і 3τ. Позначимо цей невідомий проміжок часу через Δτ.



Щоб знайти цей проміжок часу, розглянемо подібні трикутники на графіку: ABC та SBD. Запишемо відношення відповідних катетів:

$$\frac{BC}{AC} = \frac{BD}{SD} \longrightarrow \frac{T_2 - T_1}{\tau} = \frac{T_2 - 0}{2\tau - \Delta\tau} \longrightarrow \boxed{\Delta\tau = \frac{T_2 - T_1}{T_2 - 2T_1}\tau}$$

Час танення льоду, масу якого позначимо $m_л$, дорівнюватиме 2τ+Δτ. Відповідно, тепло, яке віддав нагрівач за час танення льоду $Q_1 = P \cdot (2\tau + \Delta\tau)$.

При цьому $Q_1 = \lambda m_л$.

Прирівняємо праві частини $P \cdot (2\tau + \Delta\tau) = \lambda m_л$. Звідси можна знайти масу льоду:

$$\boxed{m_л = \frac{P \cdot (2\tau + \Delta\tau)}{\lambda}}$$

Час нагрівання води до температури T_2 дорівнює 2τ-Δτ. Відповідно, тепло, яке віддав нагрівач за час нагрівання усієї води $Q_2 = P \cdot (2\tau - \Delta\tau)$. Маса усієї води складається з початкових мас води і льоду $m_в + m_л$.

При цьому $Q_2 = c \cdot (m_в + m_л) \cdot (T_2 - 0)$.

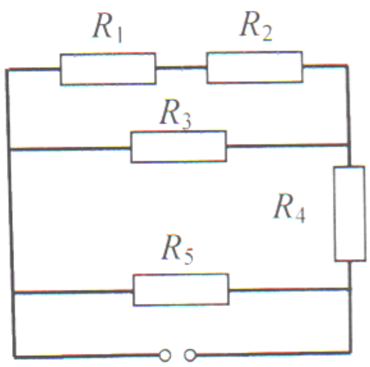
Прирівняємо праві частини $P \cdot (2\tau - \Delta\tau) = c \cdot (m_в + m_л) \cdot T_2$. Звідси можна знайти початкову масу води:

$$m_в = \frac{P \cdot (2\tau - \Delta\tau)}{c \cdot T_2} - m_л$$

$$\boxed{m_в = P \cdot \left[\frac{(2\tau - \Delta\tau)}{c \cdot T_2} - \frac{(2\tau + \Delta\tau)}{\lambda}\right]}$$

Задача 4.

Підчас лабораторної роботи учні склали електричне коло з п'яти резисторів, які мають однакові опори, і під'єднали до джерела постійного струму. П'ятеро учнів отримали вольтметри і кожен з них виміряв напругу на одному з резисторів. Вони отримали такі результати:



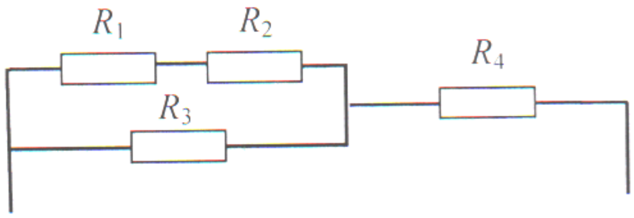
U_1 – 1В,
U_2 – 1 В,
U_3 – 2 В,
U_4 – 4 В,
U_5 – 5 В.

Після цього вчитель виявив, що на одному з вольтметрів була зсунута шкала. Визначте, на якому резисторі здійснили вимірювання напруги несправним вольтметром?

<u>Розв'язок</u>

Розглянемо ділянку кола, складену з резисторів R_1, R_2, R_3. Оскільки їх опори однакові, то сума напруг на R_1 і R_2 має дорівнювати напрузі на R_3. Справді, $U_1+U_2=U_3$=2 В. Отже, вольтметри, які вимірювали напругу на цих резисторах, справні.

Розглянемо ділянку, складену з резисторів R_1, R_2, R_3 та R_4.



Нехай R_{123} – опір ділянки кола з резисторів R_1, R_2, R_3 .

$$\frac{1}{R_{123}} = \frac{1}{2R} + \frac{1}{R} = \frac{31}{2R}$$

$$R_{123} = \frac{2}{3}R$$

Резистори R_{123} і R_4 – під'єднані послідовно, отже сила струму, що протікає через них, однакова. Тому має справджуватись рівність

$$\frac{U_{123}}{R_{123}} = \frac{U_4}{R_4}$$

Враховуючи, що $U_{123} = U_1 + U_2 = U_3 = 2$ В, маємо

$$\frac{2}{\frac{2}{3}R} = \frac{4}{R}$$

Проте

$$\frac{3}{R} \neq \frac{4}{R}$$

Отже, несправним виявився вольтметр, який вимірював напругу на 4-му резисторі

Відповіді до завдання II етапу Всеукраїнської олімпіади з фізики
(2020-2021 навчальний рік)
10 клас

Задача 1

Джерело струму приєднують до двох сусідніх вершин дротяної рамки у формі правильного випуклого n-кутника. Потім це ж саме джерело струму приєднують до двох вершин, розміщених через одну. При цьому сила струму в колі зменшується в 1,5 рази. Знайти число сторін n-кутника.

Розв'язок

Нехай опір ділянки між двома сусідніми вершинами дротяної рамки r. Якщо джерело струму приєднують до двох сусідніх вершин дротяної рамки, то отримують схему з паралельним з'єднанням. Одна кілька електричного кола буде мати опір r, а друга – $r(n-1)$. Загальний опір електричного кола R_1 визначимо з виразу:

$$\frac{1}{R_1} = \frac{1}{r} + \frac{1}{r(n-1)};$$

$$\frac{1}{R_1} = \frac{n-1+1}{r(n-1)} = \frac{n}{r(n-1)};$$

$$R_1 = \frac{r(n-1)}{n} \ (1).$$

Якщо джерело струму приєднують до двох вершин дротяної рамки, розміщених через одну, то отримують також схему з паралельним з'єднанням: одна кілька електричного кола буде мати опір $2r$, а друга – $r(n-2)$. У даному випадку загальний опір електричного кола R_2 визначимо з виразу:

$$\frac{1}{R_2} = \frac{1}{2r} + \frac{1}{r(n-2)};$$

$$\frac{1}{R_2} = \frac{n-2+2}{2r(n-2)} = \frac{n}{2r(n-2)};$$

$$R_2 = \frac{2r(n-2)}{n} \ (2).$$

За законом Ома для ділянки кола: $I_1 = \frac{U}{R_1}$, $I_2 = \frac{U}{R_2}$. Розділимо ці вирази: $\frac{I_1}{I_2} = \frac{R_2}{R_1} = 1{,}5$ (3).

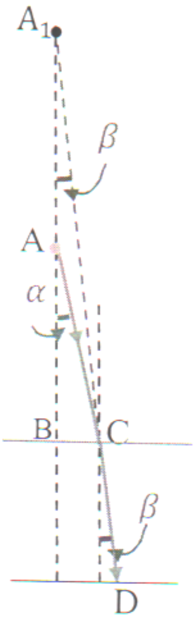
Підставимо вирази (1), (2) у вираз (3): $1{,}5 = \frac{\frac{2r(n-2)}{n}}{\frac{r(n-1)}{n}} = \frac{2(n-2)}{n-1}$.

Звідси, $n = 5$,

Задача 2

На відстані 2,5 м від поверхні води в повітрі висить ліхтар. На якій відстані від поверхні води водолаз, що перебуває під водою, побачить зображення ліхтаря? Показник заломлення води 1,3.

Розв'язок



Побудуємо хід променів від ліхтаря (точка А). На рисунку промені зображено помаранчевим кольором. ВС – зображення поверхні води.

У результаті заломлення променя світла на межі розподілу повітря-вода спостерігачу під водою, який знаходиться в точці D, здається, що промінь АС йде з точки A_1. Точки A_1 є зображенням ліхтаря.

Із співвідношення сторін трикутників отримаємо:

трикутник ABC: $tg\alpha = \frac{BC}{BA} = \frac{BC}{h}$;

трикутник A_1BC: : $tg\beta = \frac{BC}{BA_1} = \frac{BC}{H}$.

Розділимо вирази: $\frac{tg\alpha}{tg\beta} = \frac{H}{h}$ (1)

За законом заломлення $n = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$.

Розглянемо ситуацію, коли промені падають майже нормально до поверхні води, тоді кут падіння $\alpha \to 0$. Отже, $\sin\alpha = tg\alpha$.

Оскільки вода оптично більш густе середовище, ніж повітря, та $\beta < \alpha$, то $\beta \to 0$, $\sin\beta = tg\beta$.

Урахуємо в законі заломлення $n = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{tg\alpha}{tg\beta}$ (2).

Прирівняємо вирази (1) та (2): $n = \frac{tg\alpha}{tg\beta} = \frac{H}{h}$. Звідси $H = nh$.

$H = 1{,}3 \cdot 2{,}5$ м $= 3{,}25$ м.

Задача 3

Акробат стрибає на сітку з висоти $H = 8$ м. На якій h над підлогою треба натягнути сітку, щоб акробат не вдарився об підлогу під час стрибка? Відомо, що сітка прогинається на $h_0 = 0{,}5$ м, якщо акробат стрибає на неї з висоти $H_0 = 1$ м.

Розв'язок

Позначимо m – маса акробата, k – коефіцієнт пружності сітки.

Запишемо закон збереження енергії:

ситуація 1: $mg(H + h) = \frac{kh^2}{2}$;

ситуація 2: $mg(H_0 + h_0) = \frac{kh_0^2}{2}$.

Розділимо вирази: $\frac{mg(H+h)}{mg(H_0+h_0)} = \frac{kh^2}{kh_0^2}$;

$$\frac{H+h}{H_0+h_0} = \frac{h^2}{h_0^2}.$$

Отримаємо квадратне рівняння: $(H_0 + h_0)h^2 - h_0^2 h - Hh_0^2 = 0$.

Корені рівняння: $h_{1,2} = \frac{h_0^2 \pm \sqrt{h_0^4 + 4(H_0+h_0)Hh_0^2}}{2((H_0+h_0)}$.

Враховуючи, що $h_0^4 + 4(H_0 + h_0)Hh_0^2 > h_0^4$, матимемо один розв'язок:

$$h = \frac{h_0^2 + \sqrt{h_0^4 + 4(H_0+h_0)Hh_0^2}}{2((H_0+h_0)};$$

$$h = \frac{(0{,}5\ \text{м})^2 + \sqrt{(0{,}5\ \text{м})^4 + 4\cdot(1\ \text{м}+0{,}5\ \text{м})\cdot 8\text{м}\cdot(0{,}5\ \text{м})^2}}{2\cdot(1\ \text{м}+0{,}5\ \text{м})} = 1{,}24\ \text{м};$$

Задача 4

Планета має таку ж масу як Земля, але її радіус на 1 % менший, ніж радіус Землі. На скільки відсотків відрізняється прискорення вільного падіння на полюсі планети від прискорення вільного падіння на полюсі Землі?

Розв'язок

Відмінність прискорення вільного падіння на полюсі та в іншому місці на поверхні планети пов'язана як з несферичністю Землі, так і з її обертанням навколо осі. На полюсі обертання Землі не впливає на прискорення вільного падіння. Вважатимемо Землю сферично-симетричною кулею. Тоді $g = G\frac{M}{R^2}$. При зменшенні радіуса на ΔR прискорення збільшиться на Δg і буде $g + \Delta g = G\frac{M}{(R-\Delta R)^2}$. Звідси $\Delta g = GM\frac{2R\Delta R - \Delta R^2}{(R+\Delta R)^2 \cdot R^2}$. Враховуючи, що ΔR << R, одержимо: $\Delta g = g\frac{2\Delta R}{R}$. $\frac{\Delta g}{g} = 2\frac{\Delta R}{R} = 2\cdot 1\% = 2\%$. Отже, прискорення вільного падіння було б на 2% більшим.

Завдання II етапу Всеукраїнської олімпіади з фізики
11 клас

Задача 1

Балон місткістю 0,05 $м^3$ наповнений стиснутим повітрям під тиском 15 *МПа* при температурі 17 ^oC. Який об'єм води можна витіснити цим повітрям з цистерни підводного човна на глибині 50 *м*? Температура морської води 280 *К*, густина 1030 $кг/м^3$. Атмосферний тиск становить 100 *кПа*.

Розв'язання

Оскільки маса повітря не змінюється, запишемо об'єднаний газовий закон

$$\frac{P_1V_1}{T_1}=\frac{P_2V_2}{T_2}$$

і знайдемо об'єм, який займе газ при нових параметрах стану

$$V_2=\frac{P_1V_1T_2}{T_1P_2}. \qquad (1)$$

Тиск на глибині 50 м

$$P_2=\rho gh+P_A, \qquad (2)$$

де h – глибина, P_A – тиск атмосфери.

Об'єм води, який можна витіснити

$$\Delta V=V_2-V_1. \qquad (3)$$

Підставляючи (1) і (2) у (3), отримаємо

$$\Delta V=V\left(\frac{P_1T_2}{T_1(\rho gh+P_A)}-1\right)\cong 1{,}15\ м^3.$$

Задача 2

Під час польоту літака за нормальних умов на невеликій висоті над землею повітря всмоктується до турбореактивного двигуна через повітрозабірники площею $S=1м^2$. У камері згорання повітря підтримує процес згорання рідкого полива (гасу). 12000 кг палива вистачає на 3 год 30 хв. роботи двигуна, який створює силу тяги 170 кН.

Визначте швидкість витоку газів із сопел двигуна в режимі польоту зі сталою швидкістю v =900 км/год.

За нормальних умов густина повітря $\rho=1{,}3\,\frac{кг}{м^3}$

Розв'язок

Швидкість витоку газів розрахуємо із II закону Ньютона у вигляді $\Delta p = Ft$, де Δp – зміна імпульсу газів, що витікають із сопел двигуна в режимі польоту.

За $t = 1$ с імпульс газів змінюється на величину $\Delta p = Mu$, де u – швидкість витоку газів, M – їх маса.

Отже, $Mu = Ft$ (1).

Із сопла витікають гази, які утворилися під час згорання рідкого палива, та залишку повітря: $M = \Delta m + \rho V = \frac{m}{t} + \rho V$, де Δm – витрати пального за 1 секунду, V – об'єм повітря, яке всмокталося через повітрозабірники, за одну секунду.

За 1 секунду літак долає відстань $L = vt$, тому об'єм повітря, що прокачується під час польоту на дану відстань, дорівнює $V = SL = Svt$.

Отже, $M = \frac{m}{t} + \rho Svt$ (2).

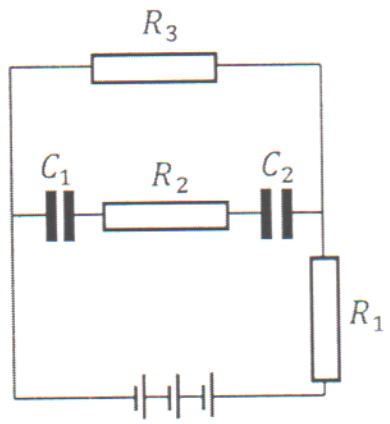
Підставимо вираз (2) у (1): $(\frac{m}{t} + \rho Svt)u = Ft$.

Звідси $u = \frac{Ft}{\frac{m}{t} + \rho Svt}$;

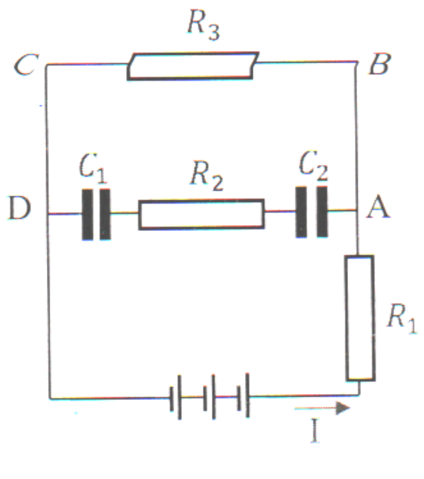
$$u = \frac{170000\ \text{Н} \cdot 1\text{с}}{\frac{12000\ \text{кг}}{3\ \text{год}\ 30\ \text{хв}} + 1{,}3\frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \cdot 1\ \text{м}^2 \cdot 900\frac{\text{км}}{\text{год}} \cdot 1\text{с}} = 527{,}1\ \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Задача 3

Два конденсатори ємністю 2 мкФ і 3 мкФ включені в коло, яке містить джерело струму з електрорушійною силою 8,4 В. Визначте напругу на конденсаторах, якщо внутрішній опір джерела 0,4 Ом, а опори R_1, R_2 і R_3 відповідно дорівнюють 3 Ом, 1 Ом і 5 Ом.



Розв'язок



(1).

Запишемо закон Ома для повного кола: $I = \frac{\varepsilon}{r+R_1+R_3}$.

Напруга на резисторі R_3 дорівнює $U_3 = IR_3 = \frac{\varepsilon R_3}{r+R_1+R_3}$

Аналогічну напругу буде мати ділянка кола з конденсаторами, оскільки з резистором R_3 утворює паралельне з'єднання ділянок електричного кола між точками А та В. Напруга на ділянці кола з конденсаторами дорівнює сумі напруг на обох конденсаторах: $U_3 = U_1 + U_2$ (2).

Оскільки $U_1 = \frac{q}{C_1}$ (3), $U_2 = \frac{q}{C_2}$ (4), то вираз (2) набуває вигляду:

$$U_3 = \frac{q}{C_1} + \frac{q}{C_2} = q\frac{C_1+C_2}{C_1C_2}.$$

Звідси $q = \frac{U3C1C2}{C_1+C_2}$ (5).

Підставимо вираз (1) у вираз (5) та отримаємо:

$$q = \frac{\varepsilon R_3 C_1 C_2}{(r+R_1+R_3)(C_1+C_2)} \quad (6)$$

Підставимо вираз (6) у вирази (3) та (4):

$$U_1 = \frac{\varepsilon R_3 C_1 C_2}{C_1(r+R_1+R_3)(C_1+C_2)} = \frac{\varepsilon R_3 C_2}{(r+R_1+R_3)(C_1+C_2)};$$

$$U_2 = \frac{\varepsilon R_3 C_1 C_2}{C_2(r+R_1+R_3)(C_1+C_2)} = \frac{\varepsilon R_3 C_1}{(r+R_1+R_3)(C_1+C_2)}.$$

$$U_1 = \frac{8{,}4\ \text{В}\cdot 5\ \text{Ом}\cdot 3\ \text{мкФ}}{(0{,}4\ \text{Ом}+3\ \text{Ом}+5\ \text{Ом})(2\ \text{мкФ}+3\ \text{мкФ})} = 3\text{В};$$

$$U_2 = \frac{8{,}4\ \text{В}\cdot 5\ \text{Ом}\cdot 2\ \text{мкФ}}{(0{,}4\ \text{Ом}+3\ \text{Ом}+5\ \text{Ом})(2\ \text{мкФ}+3\ \text{мкФ})} = 2\text{В}.$$

Задача 4

У експерименті для охолодження зразків використовували зріджений гелій об'ємом 4 л. Половина гелію випарувалася. Його було зібрано та перекачано до резервуару сталого об'єму 24,9 м^3, у якому вже був гелій за температури 300 K і тиску 10^5 Па. Температура в резервуарі не змінюється. Уважайте, що молярна маса гелію становить 4 $\frac{\text{г}}{\text{моль}}$, густина зрідженого гелію – 0,125 $\frac{\text{г}}{\text{см}^3}$, універсальна газова стала 8,3 $\frac{\text{Дж}}{\text{моль}\cdot\text{К}}$. На скільки відсотків збільшився тиск гелію в резервуарі?

Розв'язок

Визначимо масу гелію m_0, який випарувався: $m_0 = \rho_0 \frac{V_0}{2}$ (1), де ρ_0 – густина зрідженого гелію, V_0 – об'єм гелію.

Щоб визначити масу гелію m, який вже був у резервуарі, використаємо рівняння Менделєєва-Клапейрона: $PV = \frac{m}{M} RT$. Звідси $m = \frac{PVM}{RT}$ (2).

Після додавання випарованого гелію в резервуар, у ньому загальна маса гелію m_1 стала дорівнювати $m_1 = m_0 + m$ (3).

Тиск гелію в резервуарі визначимо з рівняння Менделєєва-Клапейрона: $P_1 V = \frac{m_1}{M} RT$. Звідси $P_1 = \frac{m_1}{MV} RT$.

Якщо врахуємо в даному виразі вирази (1), (2), (3), то отримаємо:

$$P_1 = \frac{(m_0 + m)}{MV} RT = \frac{\left(\frac{\rho_0 V_0}{2} + \frac{PVM}{RT}\right)}{MV} RT = \frac{\rho_0 V_0 RT}{2MV} + P.$$

Під час перекачування гелію тиск змінився на величину ΔP:

$$\Delta P = P_1 - P = \frac{\rho_0 V_0 RT}{2MV} + P - P = \frac{\rho_0 V_0 RT}{2MV}.$$

Отже тиск гелію в резервуарі збільшився на $\frac{\Delta P}{P} \cdot 100\%$:

$$\frac{\Delta P}{P} \cdot 100\% = \frac{\rho_0 V_0 RT}{2MVP} \cdot 100\%.$$

$$\frac{\Delta P}{P} \cdot 100\% = \frac{0{,}125 \cdot 10^3 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \cdot 4 \cdot 10^{-3}\ \text{м}^3 \cdot 8{,}31 \frac{\text{Дж}}{\text{моль}\cdot\text{К}} \cdot 300\ K}{2 \cdot 4 \cdot 10^{-3} \frac{\text{кг}}{\text{моль}} \cdot 24{,}9\ \text{м}^3 \cdot 10^5\ \text{Па}} \cdot 100\% = 6{,}26\%.$$