ІІ етап Всеукраїнської олімпіади з математики 2023 рік

6 клас

1. Серед наведених чисел виберіть найбільше та найменше

$$\frac{2024}{2023};\frac{2023}{2022};\frac{2022}{2021};\ldots;\frac{1001}{1000}.$$

Відповідь обґрунтуйте.

Вказівка: Якщо кожне число зменшити на 1 то отримаємо: $\frac{1}{2023};\frac{1}{2022};\frac{1}{2021};\ldots;\frac{1}{1000}$. Очевидно, що вони впорядковані в порядку зростання. Тому серед цих чисел найбільше число $\frac{1}{1000}$, а найменше $\frac{1}{2023}$.

Відповідь: найбільше число $\frac{1001}{1000}$, а найменше $\frac{2024}{2023}$.

2. Поставте замість букв цифри так, щоб утворилась правильна числова рівність:

ПЛАН+ЗАВОД=БУДОВА

(однаковим буквам відповідають однакові цифри).

Відповідь: ПЛАН=6274, ЗАВОД=97583, БУДОВА=103857.

3. Скільки трицифрових чисел містить цифру три?

Вказівка: всіх трицифрових чисел 900, а всіх трицифрових чисел, які містять цифру 3 буде $8\cdot 19+100=252$.

Відповідь: 252.

4. П'ять чоловіків А, В, С, Д, Е одягнули капелюхи або білого або чорного кольору. Ніхто з них не знає капелюх якого кольору на ньому. Відомо, що чоловік, який одягнув чорний капелюх, завжди говорить правду, а чоловік, який одягнув білий капелюх, завжди говорить неправду. Четверо з них висловили наступні твердження:

А: Я бачу три чорних і один білий капелюх.

В: Я бачу чотири білих капелюхи.

С: Я бачу один чорний і три білих капелюхи.

Д: Я бачу чотири чорних капелюхи.

Визначте, капелюх якого кольору на кожному з чоловіків.

Вказівка: Якщо А говорить правду, то на ньому чорний капелюх, і в кімнаті є 4 чорних капелюхи. Але це суперечить твердженням В і С, які говорять, що на ньому білий капелюх. Отже, А говорить неправду, і на ньому білий капелюх.

Якщо В говорить правду, то на ньому чорний капелюх, і в кімнаті є 4 білих капелюхів і 1 чорний. Тому С сказав правду, що неможливо. Отже, В говорить неправду, і на ньому білий капелюх.

Якщо Д говорить правду, то на ньому чорний капелюх, і в кімнаті є 5 чорних капелюхи. Отже, всі мали сказати правду, що суперечить кожному з інших тверджень, тому Д говорить неправду і на ньому білий капелюх.

Якщо С сказав неправду, то всі мають білий капелюх. А тому В мав сказати правду, що неможливо. Тому С говорить правду, і на ньому чорний капелюх.

Відповідь: А – білий, В – білий, С – чорний, Д – білий, Е – чорний.

Кожне завдання оцінюється 7-ма балами *м.Ужгород*

Час розв'язання 3 год.

Користування калькуляторами заборонено

ІІ етап Всеукраїнської олімпіади з математики 2023 рік

7 клас

1. У класі кількість відсутніх учнів становить 12,5% від кількості присутніх. Якщо з класу вийдуть ще 2 учнів, то відсутніми будуть 20% від кількості учнів, що залишилися в класі. Скільки учнів навчається в цьому класі ?

Вказівка: нехай x учнів присутні. Тоді $0{,}125x$ учнів відсутні. Отже, складаємо рівняння: $0{,}125x+2=0{,}2(x–2)$. Тому $x=32$.

Відповідь: у класі навчається 36 учнів.

2. Розв'яжіть рівняння $|x–1|+x^2+1=2x$.

Вказівка: перепишемо рівняння у вигляді: $|x–1|+(x–1)^2=0$. Отримаємо суму невід'ємних чисел, яка дорівнює нулю. Це можливо, коли кожен доданок дорівнює нулю. Отже, $x=1$.

Відповідь: x=1.

3. Знайдіть тризначне число $\overline{abc}$ таке, що чотиризначні числа $\overline{abc1}$, $\overline{2abc}$ задовольняють рівняння $\overline{abc1} = 3 \cdot \overline{2abc}$.

Вказівка: оскільки $\overline{abc1} = \overline{abc0} + 1$, а $\overline{2abc} = 2000 + \overline{abc}$, то дане в умові задачі рівняння буде мати вигляд $10 \cdot \overline{abc} + 1 = 6000 + \overline{abc}$, звідки $\overline{abc} = 857$.

Відповідь: 857.

4. Всередині кута АОВ, який дорівнює 120° , проведено промені ОС і OD так, що кожен з них є бісектрисою якогось із кутів, що утворилися при цьому. Знайдіть величину кута АОС. Укажіть всі можливі варіанти.

Вказівка: кут АОС може бути рівним 90°, 80°, 60°, 40°, 30°.

5. На дошці записано число 60. Сашко і Юрко грають у таку гру: кожен із двох хлопчиків по черзі за один хід зменшує утворене число на будь-який із його дільників. Програє той із гравців, хто першим отримає нуль. Гру розпочинає Юрко. Чи зможе Юрко забезпечити собі перемогу? Відповідь обґрунтуйте.

Вказівка: виграє перший гравець. Він зменшує утворене число на 1. Тому після ходів другого гравця утворюватимуться парні числа, а після ходів першого гравця непарні числа. Оскільки нуль парне число, то отримає його другий гравець.

Відповідь: так.

Кожне завдання оцінюється 7-ма балами *м.Ужгород*

Час розв'язання 4 год.

Користування калькуляторами заборонено

ІІ етап Всеукраїнської олімпіади з математики 2023 рік

8 клас

1. Відомо, що число $\frac{a^2}{a-b}$ – ціле число, де a і b різні цілі числа. Доведіть, що число $\frac{b^3}{a-b}$ також ціле.

Вказівка: $\frac{b^3}{a-b}=\frac{b^3}{a-b}-\frac{a^3}{a-b}+\frac{a^3}{a-b}=\frac{b^3-a^3}{a-b}+\frac{a^2}{a-b}\cdot a=-b^2-ab-a^2+\frac{a^2}{a-b}\cdot a$ – ціле число.

Відповідь: доведено.

2. При яких значеннях змінних x,y,z виконується рівність
$$\frac{y+z-x}{1}=\frac{z+x-y}{3}=\frac{x+y-z}{5}=\frac{xyz}{6}?$$

Вказівка: нехай $\frac{y+z-x}{1}=\frac{z+x-y}{3}=\frac{x+y-z}{5}=\frac{xyz}{6}=t$. Тоді

$$\begin{cases} y+z-x=t, \\ z+x-y=3t, \\ x+y-z=5t, \\ xyz=6t. \end{cases} \Rightarrow x=4t, y=3t, z=2t \Rightarrow 24t^3=6t \Rightarrow 6t(2t-1)(2t+1)=0.$$

Тобто t=0 або t=0,5 або t=–0,5.

Відповідь: (0;0;0) (2;1,5;1) (–2; –1,5; –1).

3. Відрізки AM і BH відповідно медіана і висота гострокутного трикутника ABC. Відомо, що AH=1, а $\angle$MCA=2$\angle$MAC. Знайдіть довжину сторони BC.

Вказівка: відрізок HM – медіана прямокутного трикутника BHC, а, отже, дорівнює половині гіпотенузи. Звідси HM=BM=MC і відповідно трикутник HMC – рівнобедрений. Тоді $\angle$MCH=$\angle$CHM. Так як $\angle$MHC – зовнішній кут трикутника AMH, то $\angle$MHC=$\angle$HAM+$\angle$HMA, а $\angle$MCA=2$\angle$MAC, то трикутник AMH також рівнобедрений. Отже, AH=HM=BM=MC. Звідси BC=2AH=2.

Відповідь: BC=2.

4. Чи може число, сума цифр якого дорівнює 123, бути квадратом цілого числа? Відповідь обґрунтуйте.

Вказівка: сума цифр шуканого числа дорівнює 123. Це число ділиться на 3, але не ділиться на 9. Це означає, що задане число не може бути квадратом цілого числа.

Відповідь: задане число не може бути квадратом цілого числа.

5. На колі дано 2024 точки, які є вершинами правильного 2024-кутника. Двоє друзів по черзі проводять по одній хорді цього кола з кінцями у зазначених точках, причому не дозволяється проводити хорду, яка перетинає хоча б одну з вже проведених хорд. Виграє той, хто останнім проводить хорду. Хто з гравців може забезпечити собі виграш? Відповідь обґрунтуйте.

Вказівка: виграє перший гравець, якщо він першим ходом проведе діаметр кола, а далі повторюватиме ходи суперника симетрично відносно неї.

Кожне завдання оцінюється 7-ма балами *м.Ужгород*

Час розв'язання 4 год.

Користування калькуляторами заборонено

II етап Всеукраїнської олімпіади з математики 2023 рік

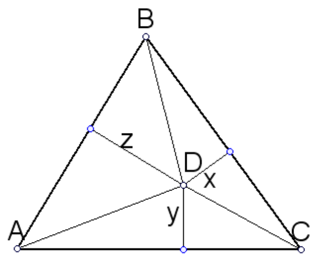
9 клас

1. Доведіть, що число $\dfrac{2023^4+2023^2+1}{2023^2+2024}$ – ціле.

Вказівка: позначимо 2023=x і розкладемо чисельник даного дробу на множники. Тоді $x^4+x^2+1=(x^2+1)^2-x^2=(x^2+1+x)(x^2+1-x)=(2023^2+1+2023)(2023^2+1-2023)=$

$=(2023^2+2024)(2023^2-2022)$. Отже, число $\dfrac{2023^4+2023^2+1}{2023^2+2024}$ – ціле.

2. Доведіть, що сума відстаней від довільної внутрішньої точки рівностороннього трикутника до його сторін є сталою величиною.



Вказівка:

Нехай a – сторона трикутника ABC, x, y, z – відстані від внутрішньої точки трикутника D до його сторін, S – площа трикутника ABC (див. рисунок). Тоді $S=\frac{1}{2}ax+\frac{1}{2}ay+\frac{1}{2}az=\frac{1}{2}a(x+y+z)$ і

$x+y+z=\dfrac{2S}{a}$ – стала величина.

Відповідь: доведено.

3. Відомо, що $1<x<2$ та $1<y<2$. Доведіть, що виконується нерівність $2xy+5>3x+3y$.

Вказівка: Так як $1<x<2$, $1<y<2$, то $(x–1)(y–1)>0$. Тоді $xy+1>x+y$. Аналогічно отримаємо, що $(x–2)(y–2)>0$. Тоді $xy+4>2x+2y$. Додавши ці дві нерівності отримаємо $2xy+5>3x+3y$.

Відповідь: доведено.

4. Розв'язати в простих числах рівняння $x^y+1=z$.

Вказівка: За умовою числа $x\geq 2,\ y\geq 2$, тому $x^y\geq 4$ і $z\geq 5$. Значить z – непарне просте число, а x – парне просте число. Тому $x=2$. Якщо $y\geq 3$, то y – непарне просте число і $(2^y+1)\,\vdots\,3$ і z – не просте число. Значить $y=2$ і $z=5$.

Відповідь: $(2;2;5)$.

5. У деякій компанії 5 хлопчиків та 6 дівчаток. Чи може статися так, що всі дівчатка знайомі з різною кількістю хлопчиків, а всі хлопчики – з однаковою кількістю дівчаток?

Вказівка: Так, може. Наприклад. Розіб'ємо дівчаток на три пари. Нехай перша дівчинка першої пари знайома з усіма п'ятьма хлопчиками, а друга дівчинка цієї пари не знайома з жодним хлопчиком. Перша дівчинка другої пари знайома з чотирма хлопчиками, а друга дівчинка цієї пари знайома з п'ятим хлопчиком. Перша дівчинка третьої пари знайома з трьома хлопчиками, а друга дівчинка цієї пари знайома з двома іншими хлопчиками.

Відповідь: так.

Кожне завдання оцінюється 7-ма балами *м.Ужгород*

Час розв'язання 4 год.

Користування калькуляторами заборонено

II етап Всеукраїнської олімпіади з математики 2023 рік

10 клас

1. Квадратний тричлен x^2+px+q має корені x_1 та x_2. Чи може квадратний тричлен $2x^2+(p+1)x+q+1$ мати корені $x_1+1,\ x_2+1$? Відповідь обґрунтуйте.

Вказівка: припустимо, що це можливо. Тоді за теоремою Вієта $x_1 + x_2 = -p$ і $x_1 x_2 = q$ та $x_1 + 1 + x_2 + 1 = -\frac{p+1}{2}$ і $(x_1 + 1)(x_2 + 1) = -\frac{q+1}{2}$**.** Звідси отримуємо, що $p = 5, q = 9$. Квадратний тричлен $x^2 + 5x + 9$ коренів не має. Отримали протиріччя.

Відповідь: не може.

2. Нехай $0 < x, y, z, t < 1$ такі, що $x + y + z + t = 2$. Доведіть, що $\sqrt{(1-x)(1-y)(1-z)(1-t)} \le \frac{xz+yt}{2}$.

Вказівка: Скористаємось нерівністю між середнім арифметичним і середнім геометричним

$$\sqrt{(1-x)(1-y)(1-z)(1-t)} \le \frac{(1-x)(1-z)+(1-y)(1-t)}{2}.$$

Замітимо, що для чисельника з умови $x + y + z + t = 2$ має місце рівність $2 - x - y - z - t + xz + yt = xz + yt$, звідки отримуємо шукану нерівність.

Відповідь: доведено.

3. Доведіть, що не існує різних додатних чисел a, b, c, d таких, що задовольняють систему $\begin{cases} a + b = c + d \\ a^3 + b^3 = c^3 + d^3 \end{cases}$.

Вказівка:

$$\begin{cases} a+b=c+d \\ a^3+b^3=c^3+d^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2+2ab+b^2=c^2+2cd+d^2 \\ a^2-ab+b^2=c^2-cd+d^2 \end{cases} \Rightarrow ab=cd$$

Тому $(a-b)^2 = (c-d)^2$, $\begin{cases} a + b = c + d \\ a - b = \pm(c-d) \end{cases}$. Отримаємо, що $a = c$ або $a = d$.

Це протирічить умові, що всі числа a, b, c, d – різні. Тому різних додатних чисел a, b, c, d, які задовольняють систему, не існує.

Відповідь: доведено.

4. У квадрат вписано коло. Довести, що сума квадратів відстаней від точки кола до вершин квадрата не залежить від вибору цієї точки. Знайти цю суму.

Вказівка: Нехай О – центр кола і квадрата, М – довільна точка кола, a – сторона квадрата. Тоді 2МО=a, МО – медіана в трикутниках АМС і BMD,

$4MO^2 = 2(MA^2 + MC^2) - AC^2$, $4MO^2 = 2(MB^2 + MD^2) - BD^2$. Рівності мають місце і в тому випадку, коли M належить AC або BD. Додавши ці рівності, отримаємо, що
$MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = 3a^2$.

Відповідь: $3a^2$.

5. Відбувся волейбольний турнір в одне коло. Будемо говорити, що команда A сильніша за команду B, якщо A виграла від B або є така команда C, яка виграла від B і програла при цьому команді A. Доведіть, що команда, яка виграла турнір, сильніша від усіх інших команд.

Вказівка: нехай команда A – виграла турнір, B – довільна команда. Якщо команда A виграла від команди B, то вона сильніша від B. Якщо команда A програла команді B, то всі команди, в яких виграла A не можуть програти B, бо тоді B виграла б більше ігор, ніж A. Отже, серед команд, які програли A є команда C, яка виграла від B. Тобто, команда A сильніша від команди B.

Відповідь: доведено.

Кожне завдання оцінюється 7-ма балами *м.Ужгород*
Час розв'язання 4 год.
Користування калькуляторами заборонено

II етап Всеукраїнської олімпіади з математики 2023 рік

11 клас

1. Розв'яжіть рівняння $2023^x = y^2+y+4$, де x, y – натуральні числа.

Вказівка:

Оскільки $y^2+y=y(y+1)$ – парне число, то задане рівняння не має розв'язків.
Відповідь: не має розв'язків.

2. Доведіть нерівність

$$a^4 + b^4 + c^4 \geq abc(a + b + c),$$

Вказівка: потрібно скористатися двічі нерівністю трьох квадратів:

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + xz + yz.$$

Тоді $a^4 + b^4 + c^4 \geq a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 \geq ab \cdot ac + ab \cdot bc + ac \cdot bc \geq abc(a + b + c)$.

Відповідь: доведено.

3. Нехай $n = 2^{p-1}(2^p - 1)$, де $2^p - 1$ – просте число. Довести, що сума всіх дільників числа n , відмінних від самого n, дорівнює n**.**

Вказівка: випишемо всі дільники числа $n = 2^{p-1}q$ (де $q = 2^p - 1$ – просте число), які менші від нього самого:

$$1, 2, 2^2, \dots, 2^{p-2}, 2^{p-1},$$

$$q, 2q, 2^2q, \dots, 2^{p-2}q$$

Числа першого рядка і числа другого рядка утворюють геометричну прогресію. Знаходимо суми цих прогресій:

$$2^p - 1 = q \quad \text{і} \quad q(2^{p-1} - 1) = n - q$$

Отже, сума всіх дільників числа n, відмінних від самого n, дорівнює n**.**

Відповідь: доведено.

4. Довести, що площа опуклого чотирикутника не перевищує $\frac{1}{4}(a+c)(b+d)$, де *a, b, c, d* – довжини послідовних сторін чотирикутника.

Вказівка: Нехай S – площа опуклого чотирикутника. Тоді

$S = \frac{1}{2}absin\alpha + \frac{1}{2}cdsin\beta \leq \frac{1}{2}(ab + cd)$, де α – кут між сторонами a і b, β – кут між сторонами c і d

$S = \frac{1}{2}bcsin\gamma + \frac{1}{2}adsin\delta \leq \frac{1}{2}(bc + ad)$, де γ – кут між сторонами b і c, δ – кут між сторонами a і d

Тому $2S \leq \frac{1}{2}(ab + cd + bc + ad) \Rightarrow S \leq \frac{1}{4}(ab + ad + bc + cd) = \frac{1}{4}(a + c)(b + d)$

Відповідь: доведено.

5. На колі розміщено $2n$ точок. За один хід гравцеві дозволяється з'єднати довільні дві точки відрізком, який не перетинає відрізки, проведені раніше. Програє той, хто не може зробити черговий хід. Хто з гравців може забезпечити собі виграш? Відповідь обґрунтуйте.

Вказівка: виграє перший гравець. Першим ходом він сполучить дві точки кола A і B відрізком так, щоб у різних півплощинах була однакова кількість точок по $(n-2):2$. Далі перший гравець повторюватиме ходи другого гравця симетрично відносно відрізка AB.

Відповідь: виграє перший гравець.

Кожне завдання оцінюється 7-ма балами *м.Ужгород*

Час розв'язання 4 год.

Користування калькуляторами заборонено