

II етап Всеукраїнської олімпіади з математики 2023 рік

6 клас

1. Серед наведених чисел виберіть найбільше та найменше

$$\frac{2024}{2023}; \frac{2023}{2022}; \frac{2022}{2021}; \dots; \frac{1001}{1000}.$$

Відповідь обґрунтуйте.

2. Поставте замість букв цифри так, щоб утворилась правильна числова рівність:

$$\text{ПЛАН} + \text{ЗАВОД} = \text{БУДОВА}$$

(однаковим буквам відповідають однакові цифри).

3. Скільки трицифрових чисел містить цифру три?
4. П'ять чоловіків А, В, С, Д, Е одягнули капелюхи або білого або чорного кольору. Ніхто з них не знає капелюх якого кольору на ньому. Відомо, що чоловік, який одягнув чорний капелюх, завжди говорить правду, а чоловік, який одягнув білий капелюх, завжди говорить неправду. Четверо з них висловили наступні твердження:

А: Я бачу три чорних і один білий капелюх.

В: Я бачу чотири білих капелюхи.

С: Я бачу один чорний і три білих капелюхи.

Д: Я бачу чотири чорних капелюхи.

Визначте, капелюх якого кольору на кожному з чоловіків.

Кожне завдання оцінюється 7-ма балами

м. Ужгород

Час розв'язання 3 год.

Користування калькуляторами заборонено

II етап Всеукраїнської олімпіади з математики 2023 рік

7 клас

1. У класі кількість відсутніх учнів становить 12,5% від кількості присутніх. Якщо з класу вийдуть ще 2 учнів, то відсутніми будуть 20% від кількості учнів, що залишилися в класі. Скільки учнів навчається в цьому класі ?
2. Розв'яжіть рівняння $|x-1| + x^2 + 1 = 2x$.
3. Знайдіть тризначне число \overline{abc} таке, що чотиризначні числа $\overline{abc1}$, $\overline{2abc}$ задовольняють рівняння $\overline{abc1} = 3 \cdot \overline{2abc}$.
4. Всередині кута АОВ, який дорівнює 120° , проведено промені ОС і OD так, що кожен з них є бісектрисою якогось із кутів, що утворилися при цьому. Знайдіть величину кута АОС. Укажіть всі можливі варіанти.

5. На дошці записано число 60. Сашко і Юрко грають у таку гру: кожен із двох хлопчиків по черзі за один хід зменшує утворене число на будь-який із його дільників. Програє той із гравців, хто першим отримає нуль. Гру розпочинає Юрко. Чи зможе Юрко забезпечити собі перемогу? Відповідь обґрунтуйте.

Кожне завдання оцінюється 7-ма балами

м. Ужгород

Час розв'язання 4 год.

Користування калькуляторами заборонено

II етап Всеукраїнської олімпіади з математики 2023 рік

8 клас

1. Відомо, що число $\frac{a^2}{a-b}$ – ціле число, де a і b різні цілі числа. Доведіть, що число $\frac{b^3}{a-b}$ також ціле.
2. При яких значеннях змінних x, y, z виконується рівність $\frac{y+z-x}{1} = \frac{z+x-y}{3} = \frac{x+y-z}{5} = \frac{xyz}{6}$?
3. Відрізки AM і BH відповідно медіана і висота гострокутного трикутника ABC . Відомо, що $AH=1$, а $\angle MCA=2\angle MAC$. Знайдіть довжину сторони BC .
4. Чи може число, сума цифр якого дорівнює 123, бути квадратом цілого числа? Відповідь обґрунтуйте.
5. На колі дано 2024 точки, які є вершинами правильного 2024-кутника. Двоє друзів по черзі проводять по одній хорді цього кола з кінцями у зазначених точках, причому не дозволяється проводити хорду, яка перетинає хоча б одну з вже проведених хорд. Виграє той, хто останнім проводить хорду. Хто з гравців може забезпечити собі виграш? Відповідь обґрунтуйте.

Кожне завдання оцінюється 7-ма балами

м. Ужгород

Час розв'язання 4 год.

Користування калькуляторами заборонено

II етап Всеукраїнської олімпіади з математики 2023 рік

9 клас

1. Доведіть, що число $\frac{2023^4 + 2023^2 + 1}{2023^2 + 2024}$ – ціле.

2. Доведіть, що сума відстаней від довільної внутрішньої точки рівностороннього трикутника до його сторін є сталою величиною.
3. Відомо, що $1 < x < 2$ та $1 < y < 2$. Доведіть, що виконується нерівність $2xy + 5 > 3x + 3y$.
4. Розв'язати в простих числах рівняння $x^y + 1 = z$.
5. У деякій компанії 5 хлопчиків та 6 дівчаток. Чи може статися так, що всі дівчатка знайомі з різною кількістю хлопчиків, а всі хлопчики – з однаковою кількістю дівчаток?

Кожне завдання оцінюється 7-ма балами

м. Ужгород

Час розв'язання 4 год.

Користування калькуляторами заборонено

II етап Всеукраїнської олімпіади з математики 2023 рік

10 клас

1. Квадратний тричлен $x^2 + px + q$ має корені x_1 та x_2 . Чи може квадратний тричлен $2x^2 + (p + 1)x + q + 1$ мати корені $x_1 + 1$, $x_2 + 1$? Відповідь обґрунтуйте.
2. Нехай $0 < x, y, z, t < 1$ такі, що $x + y + z + t = 2$. Доведіть, що $\sqrt{(1-x)(1-y)(1-z)(1-t)} \leq \frac{xz+yt}{2}$.
3. Доведіть, що не існує різних додатних чисел a, b, c, d таких, що задовольняють систему
$$\begin{cases} a + b = c + d \\ a^3 + b^3 = c^3 + d^3 \end{cases}$$
.
4. У квадрат вписано коло. Довести, що сума квадратів відстаней від точки кола до вершин квадрата не залежить від вибору цієї точки. Знайти цю суму.
5. Відбувся волейбольний турнір в одне коло. Будемо говорити, що команда А сильніша за команду В, якщо А виграла від В або є така команда С, яка виграла від В і програла при цьому команді А. Доведіть, що команда, яка виграла турнір, сильніша від усіх інших команд.

Кожне завдання оцінюється 7-ма балами

м. Ужгород

Час розв'язання 4 год.

Користування калькуляторами заборонено

II етап Всеукраїнської олімпіади з математики 2023 рік

11 клас

1. Розв'яжіть рівняння $2023^x = y^2 + y + 4$, де x, y – натуральні числа.
2. Доведіть нерівність

$$a^4 + b^4 + c^4 \geq abc(a + b + c),$$

3. Нехай $n = 2^{p-1}(2^p - 1)$, де $2^p - 1$ – просте число. Довести, що сума всіх дільників числа n , відмінних від самого n , дорівнює n .
4. Довести, що площа опуклого чотирикутника не перевищує $\frac{1}{4}(a + c)(b + d)$, де a, b, c, d – довжини послідовних сторін чотирикутника.
5. На колі розміщено $2n$ точок. За один хід гравцеві дозволяється з'єднати довільні дві точки відрізком, який не перетинає відрізки, проведені раніше. Програє той, хто не може зробити черговий хід. Хто з гравців може забезпечити собі виграш? Відповідь обґрунтуйте.

Кожне завдання оцінюється 7-ма балами

м. Ужгород

Час розв'язання 4 год.

Користування калькуляторами заборонено