II етап Всеукраїнської олімпіади з математики 2023 рік

6 клас

1. У кімнаті, що має прямокутну форму, розставити 14 стільців так, щоб вздовж кожної стінки стояла однакова кількість стільців.
2. При додаванні трьох чисел цифри замінили літерами (однакові цифри — однаковими літерами) та одержали результат:

$$\begin{array}{r} \text{К Н И Г А} \\ \text{К Н И Г А} \\ +\ \text{К Н И Г А} \\ \hline \text{Н А У К А} \end{array}$$

   Відновити цифри, які замінено літерами.
3. У книзі 400 сторінок. З’ясуйте, скільки разів при нумерації сторінок зустрічається цифра 9? Відповідь обґрунтуйте.
4. Знайти найменше натуральне число, яке при діленні на 2, 3, 5,11 і 13 дає в остачі 1.

На виконання роботи відводиться 3 години
Кожна задача оцінюється в 7 балів
Використання цифрових пристроїв не дозволяється

II етап Всеукраїнської олімпіади з математики 2023 рік

7 клас

1. Дано відрізки довжиною 10, 20, 30 і 40 см. Скільки з них можна скласти різних рівнобедрених трикутників?
2. При множенні двох чисел деякі цифри замінили * («зірочками») та одержали результат:

$$\begin{array}{cccccc}
 & & & * & * & * \\
 & & \times & * & * & * \\
\hline
 & & 7 & * & * & * \\
 & & * & * & * & \\
* & * & * & * & & \\
\hline
* & * & * & 7 & 7 & 7
\end{array}$$

   Відновити цифри, які замінено зірочками.
3. У листопаді Денис кожного дня купував собі від однієї до трьох новорічних іграшок. Першого грудня він спробував усі куплені іграшки розставити в прямокутник. Коли він розставив їх у ряди по 7 іграшок у кожному ряді, то виявились 6 зайвих іграшок. Коли розставив у ряди по 10 іграшок, то зайвими лишилися 3 іграшки. З'ясуйте, чи зможе Денис розставити їх у ряди по 4 іграшки? Відповідь обґрунтуйте.
4. На дошці записані числа 1, 2, 3, …, 2022. Оленка підкреслила усі числа, які діляться на 2, потім – усі числа, які діляться на 3, і, нарешті, – усі числа, які діляться на 5. З'ясуйте, скільки чисел Оленка підкреслила двічі? Відповідь обґрунтуйте.
5. Серед учнів 7 класу, що цікавляться математикою 20% тих, які цікавляться ще й хімією, а 25% учнів, які цікавляться хімією, цікавляться також і математикою. І тільки двом учням не цікавий жоден із цих предметів. Скільки учнів у 7 класі, коли відомо, що їх більше 20, але менше 30?

На виконання роботи відводиться 4 години
Кожна задача оцінюється в 7 балів
Використання цифрових пристроїв не дозволяється

II етап Всеукраїнської олімпіади з математики 2023 рік

8 клас

1. Ненульові числа a, b задовольняють умови:

$$6a + 6b = \frac{25}{a} + \frac{25}{b} = 25.$$

Знайдіть значення виразу $\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}} + \frac{\mathrm{b}}{\mathrm{a}}$.

2. Скільки розв'язків залежно від значення параметра a має рівняння:

$$|x + 5| + |x - 3| = a.$$

3. На нараду в олімпійський комітет для обговорення питань олімпіад запросили 30 спортсменів з футболу, баскетболу, волейболу та тенісу. Серед запрошених баскетболістів та тенісистів разом виявилось удвічі менше, ніж футболістів, а баскетболістів і волейболістів разом удвічі більше, ніж тенісистів. З'ясуйте, скільки на зустріч запросили футболістів, якщо спортсменів із кожного виду спорту була різна кількість? Відповідь обгрунтуйте.
4. Заданий ромб, у якого всі сторони та одна з діагоналей рівні 10 см. Усередині або на сторонах цього ромба вибирають довільним чином 9 точок. Доведіть, що принаймні дві з них знаходяться на відстані не більшій від 5 см.
5. На стороні AB трикутника ABC задано точку F. Відрізок CF перетинає медіану AM трикутника в точці D, причому AF = AD. Знайти відношення BF : DM.

На виконання роботи відводиться 4 години
Кожна задача оцінюється в 7 балів
Використання цифрових пристроїв не дозволяється

II етап Всеукраїнської олімпіади з математики 2023 рік

9 клас

1. Обчисліть значення виразу:

$$\sqrt{2022+2\sqrt{2021}}-\sqrt{2022-2\sqrt{2021}}.$$

2. Спростіть вираз:

$$a^3+b^3+3(a^3b+ab^3)+6(a^3b^2+a^2b^3),$$

де a $і$ $b -$ корені рівняння $x^2-x+q=0$.

3. Є дві посудини ємністю 1 л кожна. Одна з них наповнена соком, а інша – порожня. Сік послідовно переливають з першої посудини в другу, з другої – у першу, з першої – знову в другу і т. д., причому частка соку, що відливається, становить відповідно 1/2, 1/3, 1/4 і т. д. від кількості соку в посудині, з якої він відливається. Скільки соку буде у кожній із посудин після 125 переливань?
4. Знайдіть всі тризначні числа $\overline{abc}$, квадрати яких закінчуються на $\overline{abc}$.
5. Дано прямокутник ABCD. Точка К лежить на стороні AD, точка N лежить на стороні CD. Доведіть, що площа трикутника BNK не більша за половину площі прямокутника ABCD.

На виконання роботи відводиться 4 години
Кожна задача оцінюється в 7 балів Використання
цифрових пристроїв не дозволяється

II етап Всеукраїнської олімпіади з математики 2023 рік

10 клас

1. Обчисліть: $\sqrt{1+2021\sqrt{1+2022\sqrt{1+2023\cdot 2025}}}$.

2. Побудувати геометричне місце точок площини, що задовольняють задану нерівність:

$$|y-2022| \le \left(\sqrt{x^2-1}+\sqrt{1-x^2}\right)^{2022}.$$

3. На площині розташовані 2022 точки так, що кожні три з них утворюють трикутник з площею, що не перевищує 1. З’ясуйте, чи можна всі ці точки покрити трикутником з площею 4? Відповідь обгрунтуйте.

4. Знайдіть всі прості числа p такі, що число p^2+11 має рівно 6 різних дільників (у тому числі одиницю і саме число).

5. У трикутнику ABC кут B дорівнює 60°. Точки P та Q лежать на сторонах трикутника AB та BC відповідно, причому AP=CQ та AP+PQ=AC. Доведіть, що трикутник ABC є рівностороннім.

На виконання роботи відводиться 4 години
Кожна задача оцінюється в 7 балів
Використання цифрових пристроїв не дозволяється

II етап Всеукраїнської олімпіади з математики 2023 рік

11 клас

1. Доведіть, що число $\sqrt{\sqrt{19}-\sqrt{3-8\sqrt{35-8\sqrt{19}}}}$ є цілим.

2. Розв'яжіть рівняння:

$$2022^x - 2021^x = 1.$$

3. Скількома способами на шахівницю $\mathrm{n}\times\mathrm{n}$, $\mathrm{n}\geq 3$, із якої вирізані дві протилежні по діагоналі кутові клітинки 1×1, можна виставити n тур, жодні дві з яких не атакують одна одну?

Тура – це шахова фігура, яка атакує всі поля як по горизонталі, так і по вертикалі відносно поля, у якому вона розташована.

4. У змаганні з бігу беруть участь 100 учнів. Відомо, що серед будь-яких 12 із них знайдуться двоє, які навчаються в одному класі. Доведіть, що незалежно від того, як роздали учням стартові номери (не обов'язково від 1 до 100, а у довільному порядку в межах від 1 до 100), знайдуться два учні з одного класу, номери яких починаються з однієї і тієї ж цифри.

5. У паралелограмі $ABCD$ відомо, що $\angle B < 90°$ і $AB < BC$. Точки E і F лежать на описаному навколо трикутника ABC колі ω. Дотичні до ω в цих точках проходять через D, при цьому $\angle EDA = \angle FDC$. Знайдіть кут ABC.

На виконання роботи відводиться 4 години
Кожна задача оцінюється в 7 балів
Використання цифрових пристроїв не дозволяється

A 2023-as összukrajnai matematika verseny II. fordulója

6. osztály

1. Egy téglalap alakú szoba falai mellett helyezz el 14 széket úgy, hogy minden fal mellett ugyanannyi szék legyen!

2. Három szám összegébe a számjegyeket betűkre cserélték (azonos számjegyeket azonos betűkre). Az alábbi eredményt kapták:

	К	Н	И	Г	А
	К	Н	И	Г	А
+	К	Н	И	Г	А
	Н	А	У	К	А

Írd a betűk helyére a megfelelő számjegyeket!

3. Egy könyvben 400 oldal van. Állapítsd meg hányszor szerepel a 9-es számjegy az oldalak számozásában! Válaszodat indokold meg!

4. Határozd meg azt a legkisebb természetes számot, amelyet ha 2-vel, 3-mal, 5-tel, 11-gyel és 13-mal elosztunk, akkor a maradék 1 lesz!

A kidolgozásra 3 óra áll rendelkezésre.
Minden helyesen megoldott feladat 7 pontot ér.
Számológép használata tilos!

A 2023-as összukrajnai matematika verseny II. fordulója

7. osztály

1. Adottak 10, 20, 30 és 40 cm hosszúságú szakaszok. Hány különböző egyenlő szarú háromszöget lehet kirakni belőlük?

2. Két szám szorzatában néhány számjegyet *-ra (csillagra) cseréltek, és az alábbi eredményt kapták:

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & & & * & * & * \\
 & & & \times & * & * & * \\
\hline
 & & & 7 & * & * & * \\
 & & & * & * & * & \\
 & * & * & * & * & & \\
\hline
 & * & * & * & 7 & 7 & 7
\end{array}
$$

Írd a betűk helyére a megfelelő számjegyeket!

3. Novemberben Denisz mindennap vásárolt magának 1–3 újévi játékot. December elsején az összes játékot megpróbálta téglalap alakba kirakni. Amikor minden sorba 7 játékot tett, akkor 6 fölösleges maradt. Amikor soronként 10-esével rakta ki a játékait, akkor 3 játéka maradt. Állapítsd meg, hogy Denisz kirakhatja-e a játékait úgy, hogy minden sorba 4-et tesz. Válaszodat indokold meg!

4. A táblára felírták az 1, 2, 3, …, 2022-es számokat. Olenka először áthúzta azokat a számokat, amelyek oszthatók 2-vel, majd amelyek oszthatók 3-mal és a végén azokat, amelyek oszthatók 5-tel. Állapítsd meg, hány olyan szám van, melyet Olenka 2-szer húzott át. Válaszodat indokold meg!

5. A 7. osztályos tanulók között a matematika iránt érdeklődők 20% -a szereti a kémiát is. A kémia iránt érdeklődők 25% -a szereti a matematikát is. Csak két olyan tanuló van, aki egyik tantárgy iránt sem érdeklődik. Hány tanuló jár a 7. osztályba, ha tudjuk, hogy 20-nál több, de 30-nál kevesebben vannak?

A kidolgozásra 4 óra áll rendelkezésre.
Minden helyesen megoldott feladat 7 pontot ér.
Számológép használata tilos!

A 2023-as összukrajnai matematika verseny II. fordulója

8. osztály

1. Az a és b nullával nem egyenlő számokra teljesül az alábbi feltétel:

$$6a + 6b = \frac{25}{a} + \frac{25}{b} = 25.$$

Határozd meg a $\frac{a}{b} + \frac{b}{a}$ kifejezés értékét!

2. Hány megoldása van az alábbi egyenletnek az a paraméter értékétől függően?

$$|x + 5| + |x - 3| = a.$$

3. Az olimpiai bizottság ülésére 30 sportolót hívtak meg kosárlabdázókat, focistákat, röplabdázókat és teniszezőket. A meghívott kosárlabdázók és teniszezők együtt kétszer kevesebben voltak, mint a focisták. A kosárlabdázók és röplabdázók összesen kétszer többen, mint a teniszezők. Állapítsd meg, hogy hány focistát hívtak meg az ülésre, ha minden sportágnak különböző számú képviselője volt!

4. Egy rombusz minden oldala és egyik átlója 10 cm. A rombuszban és a kerületén tetszőlegesen felvettek 9 pontot. Bizonyítsd be, hogy a felvett pontok közül legalább két pont távolsága nem több, mint 5 cm.

5. Az *ABC* háromszög *AB* oldalán felvettek egy *F* pontot. A *CF* szakasz a háromszög *AM* súlyvonalát egy *D* pontban metszi úgy, hogy *AF=AD*. Határozd meg a *BF : DM* szakaszok arányát!

A kidolgozásra 4 óra áll rendelkezésre.
Minden helyesen megoldott feladat 7 pontot ér.
Számológép használata tilos!

A 2023-as összukrajnai matematika verseny II. fordulója

9. osztály

1. Határozd meg az alábbi kifejezés értékét!

$$\sqrt{2022+2\sqrt{2021}}-\sqrt{2022-2\sqrt{2021}}.$$

2. Egyszerűsítsd az alábbi kifejezést, ha a és b az $x^2-x+q=0$ egyenlet gyökei!

$$a^3+b^3+3(a^3b+ab^3)+6(a^3b^2+a^2b^3)\ .$$

3. Van két 1 literes edényünk. Az egyik gyümölcslével van megtöltve, a másik üres. A gyümölcslevet folyamatosan áttöltik az első edényből a másodikba, majd visszatöltik a másodikból az elsőbe, majd újból áttöltik az első edényből a másodikba, és így tovább. Minden egyes áttöltésnél az üvegben lévő gyümölcslé 1/2-e, 1/3-a, 1/4-e kiloccsan. Mennyi gyümölcslé lesz mindkét edényben a 125. áttöltés után?

4. Határozd meg az összes olyan $\overline{abc}$ háromjegyű számot amelynek négyzete $\overline{abc}$ számra végződik!

5. Adott egy *ABCD* téglalap. A *K* pont az *AD* oldalra illeszkedik, az *N* pont a *CD* oldalra. Bizonyítsd be, hogy a *BNK* háromszög területe nem nagyobb az *ABCD* téglalap területének a felénél.

A kidolgozásra 4 óra áll rendelkezésre.
Minden helyesen megoldott feladat 7 pontot ér.
Számológép használata tilos!

A 2023-as összukrajnai matematika verseny II. fordulója

10. osztály

1. Számítsd ki: $\sqrt{1+2021\sqrt{1+2022\sqrt{1+2023\cdot 2025}}}$!

2. Ábrázold azon pontok mértani helyét, melyekre teljesül az alábbi egyenlőtlenség!

$$|y-2022| \leq \left(\sqrt{x^2-1}+\sqrt{1-x^2}\right)^{2022}.$$

3. A síkon adott 2022 pont, melyek közül bármelyik három, olyan háromszöget alkot, melynek a területe nem nagyobb 1-nél. Állapítsd meg, hogy lehetséges-e az összes pontot lefedni egy olyan háromszöggel, melynek a területe 4. Válaszodat indokold meg!

5. Határozd meg az összes olyan *p* prímszámot, melyre a p^2+11 összetett számnak pontosan 6 osztója van (számolva az egyet és magát a számot is)!

6. Az *ABC* háromszög *B* szöge 60°. A *P* és a *Q* pontok rendre a háromszög *AB* és *BC* oldalaira illeszkednek úgy, hogy *AP*=*CQ* és *AP*+*PQ*=*AC*. Bizonyíts be, hogy az *ABC* háromszög egyenlőszárú.

A kidolgozásra 4 óra áll rendelkezésre.
Minden helyesen megoldott feladat 7 pontot ér.
Számológép használata tilos!

A 2023-as összukrajnai matematika verseny II. fordulója

11. osztály

1. Bizonyítsd be, hogy a $\sqrt{\sqrt{19}-\sqrt{3-8\sqrt{35-8\sqrt{19}}}}$ egész szám!

2. Oldd meg az alábbi egyenletet!

$$2022^x - 2021^x = 1 \text{ !}$$

3. Hányféleképen lehet elhelyezni egy $n \times n,\ n \geq 3$ sakktáblán melynek az átlója mentén lévő két 1x1 -es sarok mezője ki van vágva, az *n* bástyát úgy, hogy egymást ne üssék!

A bástya olyan sakkfigura, amely pozíciójához képest függőlegesen és vízszintesen minden mezőre léphet.

4. Egy futóversenyen 100 tanuló vett részt. Ismeretes, hogy bármelyik 12 gyerek közül mindig van kettő, aki egy osztályban tanul. Bizonyítsd be, hogy függetlenül attól, hogyan osztották ki az indulási sorszámokat (nem feltétlenül 1-től 100-ig, hanem tetszőleges sorrendben 1 és 100 között) biztosan lesz két olyan osztálytárs, akinek a sorszáma azonos sorszámmal kezdődik.

5. Az *ABCD* paralelogrammában tudjuk, hogy $B\angle < 90°$ és $AB < BC$. Az *E* és *F* pontok az *ABC* háromszög köré írt *ω* körvonalra illeszkednek. Az *ω* körvonalhoz ezekbe a pontokba húzott érintők a *D* pontban metszik egymást és $EDA\angle = FDC\angle$. Határozd meg az *ABC* szöget!

A kidolgozásra 4 óra áll rendelkezésre.
Minden helyesen megoldott feladat 7 pontot ér.
Számológép használata tilos!