ІІ етап Всеукраїнської олімпіади з математики 2021 рік

6 клас

1. У якому році народився норвезький математик Нільс Абель, якщо остання цифра року його народження на 2 більша за третю цифру і в 4 рази менша за другу цифру? Достатньо вказати відповідь.

   Відповідь: у 1802 році.

2. Наручний годинник гнома Поспіхи щогодини тікає вперед на 2 хвилини, а наручний годинник гнома Повільняхи відстає щогодини на 1 хвилину. Вчора Поспіха і Повільняха виставили на своїх годинниках один і той самий правильний час. Коли вони прокинулися на наступний день, то годинник Поспіхи показував 8:20, а годинник Повільняхи 7:50. Який правильний час був виставлений на годинниках?

   Відповідь: правильний час 8:00.

Вказівка: Кожну годину показання годинників розходяться на три хвилини, а в момент прокидання вони відрізняються на 30 хвилин. Отже, з виставлення гномами правильного часу минуло 30 : 3 =10 годин. За цей час годинник Повільняхи відстав на 10 хвилин, а годинник Поспіхи втік уперед на 20 хвилин. Отже, правильний час 8:00.

3. Лотерейний квиток має шестизначний номер. Квиток є виграшним, якщо сума будь-яких трьох його цифр дорівнює сумі трьох інших цифр. Іван купив два лотерейні квитки номери яких є послідовними числами. Обидва вони виявилися виграшними. На яку цифру закінчувався кожний придбаний Іваном квиток?

Відповідь: менший номер квитка закінчувався на 9, а більший – на 0.

Вказівка: З умови випливає, що сума всіх цифр номера виграшного квитка є парним числом. Якщо менший номер виграшного квитка не закінчується на 9, то сума цифр наступного за ним номера більша за суму його цифр на 1. Тому номер такого квитка є непарним числом. Отримане протиріччя показує, що менший номер купленого квитка закінчується на 9, а більший номер купленого квитка закінчується на 0.

4. Четверо приятелів вирішили подарувати дівчатам квіти. Кожній із чотирьох дівчат подарували один букет. У всіх дівчат були різні квіти. Юрій цілий день не бачив Катерину і Марину. Дмитро не зміг купити букет троянд. Андрій не дарував квітів ні Олі, ні Марині. Георгій спочатку хотів подарувати букет Оленці або Катерині, але потім передумав. Ні Оленка, ні Оля не зустрічалися з Дмитром. Катерина так і не одержала свої улюблені мімози. Андрій не купував квітів, які починаються на букву «г». Ні Оленці, ні Олі не дарували троянд. Юрій не встиг купити гладіолуси. Георгій пам'ятав, що бачив у своїх друзів букети гвоздик і мімоз. Марина не отримала гвоздик і гладіолусів, на які вона сподівалася. Оленка хвалилася подрузі, що їй «не подарували цих дешевих мімоз». З'ясуйте букет яких квітів і від котрого хлопця одержала кожна дівчина.

Відповідь: наведена в таблиці

	Юрій	Дмитро	Андрій	Георгій
Катерина	–		+ троянди	–
Марина	–	+ мімози	–	
Оля		–	–	+ гладіолуси
Оленка	+ гвоздики	–		–

Вказівка: таблиця заповнюється відповідно до умов. Неможливі випадки відмічаємо рисками. Оленка могла одержати гладіолуси або гвоздики від Юрія або Андрія. Оскільки Андрій ці квіти не купував, то Оленка одержала квіти від Юрія. Відмітимо це у таблиці знаком «+». Тому Андрій подарував квіти Катерині, Дмитро – Марині, а Георгій – Олі, що також помітимо знаками «+». Уточнимо, які саме квіти подарували хлопці дівчатам. Оскільки Андрій не купував гвоздик і гладіолусів, а Катерина не одержала мімози, то Андрій подарував Катерині троянди. Аналогічно з'ясовується, що Георгій подарував Олі гладіолуси, Юрій подарував Оленці гвоздики, а Дмитро подарував Марині мімози.

Кожне завдання оцінюється 7-ма балами *м.Ужгород*
Час розв'язання 3 год.
Користування калькуляторами заборонено

ІІ етап Всеукраїнської олімпіади з математики 2021 рік

7 клас

1. У потягу 18 однакових вагонів. У деяких вагонах вільними є рівно половина місць, у деяких інших – третина місць, а в інших вагонах зайняті всі місця. При цьому у всьому потязі вільною є одна дев'ята всіх місць. У скількох вагонах всі місця зайняті?

Відповідь: у 13 вагонах.

Вказівка: Нехай у x вагонах вільна половина місць, а в y вагонах – третина місць. Тоді $x/2+y/3=18/9$. Помножимо рівність на 6. Отримаємо, що $3x + 2y = 12$. Так як x і y – натуральні числа, то перебором переконуємося, що підходять тільки $x = 2$ і $y = 3$. Тому кількість вагонів у яких всі місця зайняті дорівнює $18 – 2 – 3 = 13$.

2. У пробірку першого дня помістили один інопланетний вірус. На другий день кількість вірусів подвоїлася, на третій потроїлася порівняно з попереднім днем, на четвертий – збільшилася вчетверо, і так далі. Так тривало до 20-го дня включно, в який кількість вірусів збільшилася у 20 разів. Чи можна всі віруси, що утворилися у пробірці, розмістити в 21 пробірку порівну?

Відповідь: так**.**

Вказівка: На 20-й день у пробірці буде $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 20$ вірусів. У цьому добутку присутні множники 3 і 7. Отже, добуток ділиться на $3 \cdot 7 = 21$. Тому всі віруси можна порівну розмістити в 21 пробірку.

3. В селі Пряме всі будинки розташовані вздовж однієї прямої дороги. Аня, Богдан, Валя, Галя та Діма, будинки яких розташовані один за одним зліва направо відповідно, знайшли суму відстаней (в метрах) від свого будинку до будинків інших дітей. У Богдана вийшло 700 м, у Валі 600 м, у Галі 650 м. Яка відстань між будинками Богдана та Галі?

Відповідь: 150 метрів.

Вказівка: Позначимо будинки відповідними літерами А, Б, В, Г, Д. Тоді

БА+БВ+БГ+БД=БА+3БВ+2ВГ+ГД=700

ВА+ВБ+ВГ+ВД=АБ+2ВБ+2ВГ+ГД=600

ГА+ГБ+ГВ+ГД=АБ+2БВ+3ГВ+ГД=650

З цих рівностей знаходимо, що

БВ=700 – 600 =100 (м), а ВГ=650 – 600 =50 (м).

Тому БГ=БВ+ВГ=100+50=150 (м).

4. Уздовж прямолінійної ділянки кордону встановлено 15 стовпів. Біля кожного стовпа зловили кілька короткозорих шпигунів. Кожен із них

чесно сказав, скільки інших шпигунів він бачив. Але будь-який шпигун бачив тільки тих, хто знаходився біля його стовпа та найближчих двох сусідніх стовпів. Чи можна за цими даними відновити чисельність шпигунів, спійманих біля кожного стовпа?

Відповідь: можна.

Вказівка: Занумеруємо стовпи числами від 1 до 15 зліва направо.

З опитування всіх шпигунів, спійманих біля першого стовпа, дізнаємося кількість шпигунів, спійманих біля перших двох стовпів, а з опитування всіх шпигунів, спійманих біля другого стовпа, дізнаємося про кількість шпигунів, спійманих біля перших трьох стовпів. Тим самим дізнаємось про кількість шпигунів, спійманих біля третього стовпа.

Далі, опитавши шпигунів, спійманих біля п'ятого та четвертого стовпів, і знаючи кількість шпигунів, спійманих біля третього стовпа, дізнаємось про кількість шпигунів, спійманих біля шостого стовпа. Аналогічно визначається, кількість шпигунів спійманих біля стовпів із номерами 9, 12 та 15.

Опитавши шпигунів біля стовпа з номером 15, дізнаємося про кількість шпигунів спійманих біля стовпа з номером 14. Знаючи кількість шпигунів спійманих біля стовпів з номерами 15, 14, дізнаємось про кількість шпигунів спійманих біля стовпа з номером 13 і т.д.

5. У кожній клітинці 1x1 квадрата розміром 5x5 провели рівно одну діагональ. Вершина клітинки вважається вільною, якщо вона не є кінцем жодної з проведених діагоналей. Знайдіть найбільшу можливу кількість вільних вершин.

Відповідь: 18 вершин.

Вказівка:

Сумарна кількість вершин клітинок дорівнює 6x6=36. Нехай k – кількість вершин клітинок, які не є вільними.

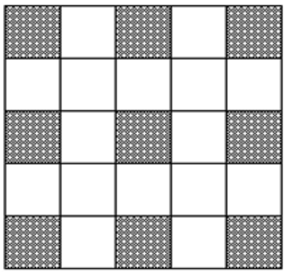


Рис.1

Розглянемо 9 клітинок, які зображені на рис. 1 і проведемо в них діагоналі. Отримаємо 2x9=18 вершин клітинок, які не є вільними. Тому $k \geq 18$, а число вільних вершин клітинок дорівнює $36 - k \leq 18$. Отже, кількість вільних вершин клітинок не перевищує 18.

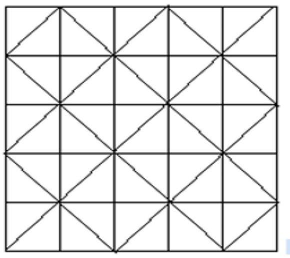


Рис.2

Приклад, коли є рівно 18 вільних вершин клітинок зображений на рис. 2. Адже, на кожній із шести горизонтальних ліній рівно три вершини клітинок є вільними.

Кожне завдання оцінюється 7-ма балами *м.Ужгород*

Час розв'язання 4 год.

Користування калькуляторами заборонено

II етап Всеукраїнської олімпіади з математики 2021 рік

8 клас

1. Двоє учнів Андрій та Богдан живуть в одному будинку і навчаються в одній школі. Андрій вийшов на 5 хв раніше Богдана. Андрію потрібно 30 хв, щоб дістатись від дому до школи, а Богдану 20 хв. Скільки часу потрібно Богдану, щоб наздогнати Андрія?

Відповідь: 10 хв.

Вказівка: Андрій проходить щохвилини $\frac{1}{30}$ шляху, а Богдан $\frac{1}{20}$. Якщо зустріч відбудеться через x хвилин після виходу Богдана, то Андрій за $5 + x$

хвилин пройде $\frac{5+x}{30}$, а Богдан $\frac{x}{20}$. Тому $\frac{5+x}{30}=\frac{x}{20}$. Отже, $100+20x=30x$, а значить $x=10$.

2. Скоротіть дріб $\frac{a^2+ab+b^2}{a^2b^2+ab+1}$, якщо $a+b-ab-1=0$.

Відповідь: 1.

Вказівка: Оскільки $a+b=1+ab$, то

$$\frac{a^2+ab+b^2}{1+ab+a^2b^2}=\frac{a^2+2ab+b^2-ab}{1+2ab+a^2b^2-ab}=\frac{(a+b)^2-ab}{(1+ab)^2-ab}=1.$$

3. Дано трикутник ABC такий, що $AB>AC>BC$. Бісектриса кута, суміжного до кута BCA перетинає пряму AB в точці N, а бісектриса кута, суміжного до кута BAC перетинає пряму BC в точці M. Виявилось, що $AM=AC=CN$. Знайдіть кути трикутника ABC.

Відповідь: $12^0, 36^0, 132^0$.

Вказівка: Нехай $\angle BAC=\alpha$. Тоді $\angle ANC=\alpha$, $\angle ACM=2\alpha+2\alpha=4\alpha=\angle AMC$, $\angle CAM=\frac{180^0-\alpha}{2}=90^0-\frac{\alpha}{2}$. З рівності $180^0=4\alpha+4\alpha+90^0-\frac{\alpha}{2}$ слідує, що $15\alpha=180^0$, $\alpha=12^0$. Тому $\angle ACB=180^0-4\alpha=132^0$ і $\angle ABC=180^0-12^0-132^0=36^0$.

4. Чи існує таке натуральне число n, що $n^2+S(n)=99\ldots98$ (99 дев'яток), де через $S(n)$ позначено суму цифр числа n?

Відповідь: не існує.

Вказівка: Відомо, що сума цифр числа при діленні на 9 має таку ж остачу, як і саме число. Всі можливі остачі від ділення числа n на число 9 є числа 0, 1, 2, …, 8. Перебором цих остач встановлюємо, що $n^2+S(n)$ має в остачі числа 0, 2, 3, 6. Оскільки число 999 ... 98 при діленні на 9 має остачу 8, то задана в умові рівність неможлива.

5. 25 тенісистів зіграли турнір в одне коло (кожен зіграв з кожним рівно один раз). Виявилось, що серед будь-яких п'яти гравців є такий гравець, що виграв від усіх інших чотирьох гравців, та такий гравець, що програв всім іншим чотирьом гравцям. Доведіть, що якщо тенісист A виграв від тенісиста B, а тенісист B виграв від тенісиста C, то тенісист A виграв від тенісиста C.

Відповідь: твердження вірне.

Вказівка: Доведемо від супротивного. Будемо позначати, що A виграв від B як $A \to B$. Нехай знайшлась трійка тенісистів A, B, C така, що $A \to B$ і $B \to C$, але $C \to A$. Кожний з тенісистів A, B, C від когось виграв і комусь програв. Нехай тенісисти P та Q, відмінні від тенісистів A, B, C. Оскільки в будь-якій п'ятірці тенісистів є переможець і є такий, хто всім програв, то, без обмеження загальності, можемо вважати, що P виграв від усіх тенісистів, а Q програв всім тенісистам у п'ятірці A, B, C, P, Q. Розглянемо нового тенісиста R. Тоді в п'ятірці A, B, C, P, R тенісист R всім програє, бо гравець P від усіх виграє. Тому в п'ятірці A, B, C, Q, R немає тенісиста, що виграв від чотирьох інших тенісистів. Протиріччя.

Кожне завдання оцінюється 7-ма балами *м.Ужгород*

Час розв'язання 4 год.

Користування калькуляторами заборонено

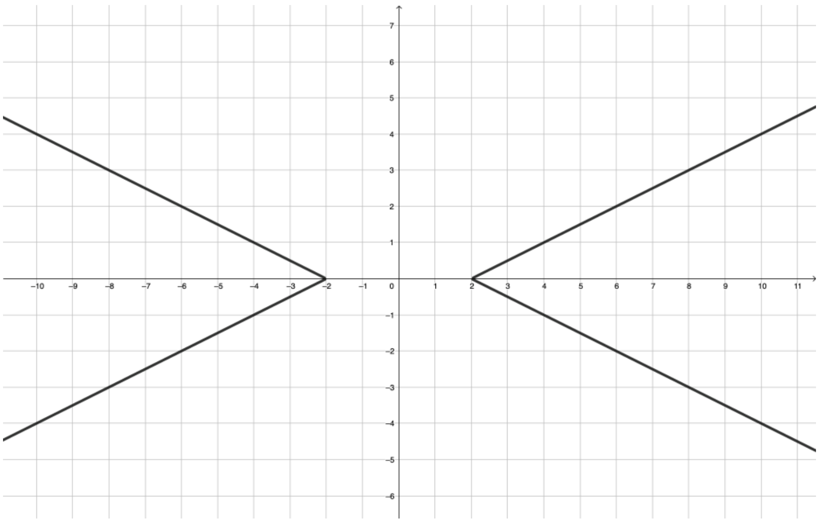
II етап Всеукраїнської олімпіади з математики 2021 рік

9 клас

1. Побудувати графік рівняння $|x|-2|y|=2$.

Відповідь: графік рівняння $|x|-2|y|=2$ зображений на рисунку.

Вказівка: рівнянням в першій чверті є рівняння $x-2y=2$. Тобто $y=\frac{x}{2}-1$. В інших чвертях графіки рівняння будуються аналогічно.



2. Для дійсних чисел x, y, z виконується рівність

$$x+y+z=x^2+y^2+z^2=x^3+y^3+z^3=1$$

Доведіть, що $xyz=0$.

Відповідь: твердження вірне.

Вказівка: мають місце формули квадрата і куба суми трьох чисел

$$(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx$$

$$(x+y+z)^3=x^3+y^3+z^3+3(x+y+z)(xy+yz+zx)-3xyz.$$

За умовою вони перетворюються в рівності

$$1=1+2xy+2yz+2zx,\quad 1=1+3(xy+yz+zx)-3xyz$$

з яких слідує, що $xy+yz+zx=0$ і, як наслідок, що $xyz=0$.

3. У гострокутному трикутнику ABC проведена медіана AM та висота BH. Пряма, яка перпендикулярна прямій AM, що проходить через точку M перетинає промінь HB в точці T. Виявилось, що $\angle MAC = 30°$. Доведіть, що $AT = BC$.

Відповідь: твердження вірне.

Вказівка: Навколо чотирикутника $HMTA$ можна описати коло діаметр якого є AT. За теоремою синусів $\frac{MH}{\sin 30°} = AT$. Тому $MH = \frac{AT}{2}$. Але HM – медіана прямокутного трикутника BHC. Тому $MH = \frac{BC}{2}$. Оскільки $\frac{AT}{2} = MH = \frac{BC}{2}$, то $AT = BC$, що і треба було довести.

4. Для дійсних чисел a, b доведіть нерівність $(a+b)^4 \le 8(a^4+b^4)$.

Відповідь: нерівність вірна.

Вказівка: Очевидно, що $(a+b)^2 \le 2(a^2+b^2)$ і $(a^2+b^2)^2 \le 2(a^4+b^4)$. Тому

$$(a+b)^4 = (a+b)^2(a+b)^2 \le 2(a^2+b^2)\cdot 2(a^2+b^2) = 4(a^2+b^2)^2 \le 4\cdot 2(a^4+b^4) = 8(a^4+b^4).$$ Доведено.

5. В таблиці $n \times m$ розташовано декілька фішок. Виявилось, що для будь-якої фішки кількість фішок в її рядку співпадає з кількістю фішок у її стовпчику. Доведіть, що кількість рядків дорівнює кількості стовпчиків, в яких є принаймні одна фішка.

Відповідь: твердження вірне.

Вказівка: Нехай у деякому рядку знаходиться k фішок. За умовою кожний стовпчик, що містить хоча б одну з них, також містить k фішок, а кожний рядок, що містить хоча б одну із k^2 фішок, містить також k фішок.

Фішка, яка відмінна від k^2 фішок, не належить жодному із виділених k рядків і k стовпців. Адже, в противному випадку вони б містили k+1 фішку. Повторюючи вищенаведені міркування для множини всіх фішок, які відмінні від виділених k^2 фішок, доводимо, що кількість рядків в яких є принаймні одна фішка, дорівнює кількості стовпчиків, які містять хоча б одну фішку.

Кожне завдання оцінюється 7-ма балами *м.Ужгород*

Час розв'язання 4 год.

Користування калькуляторами заборонено

ІІ етап Всеукраїнської олімпіади з математики 2021 рік

10 клас

1. Знайдіть хоча б одне чотиризначне число, що має таку властивість: якщо суму всіх цифр цього числа помножити на добуток усіх його цифр, то в результаті отримаємо 3990.

Відповідь: 1567.

Вказівка: Розкладаємо число 3990 в добуток

$$3990 = 2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot19 = 1\cdot6\cdot5\cdot7\cdot(1+6+5+7),$$

з якого випливає, що число 1567 задовольняє умову задачі.

2. Ненульові числа x та y задовольняють нерівності $x^2 - x > y^2$ та $y^2 - y > x^2$. Який знак має добуток xy?

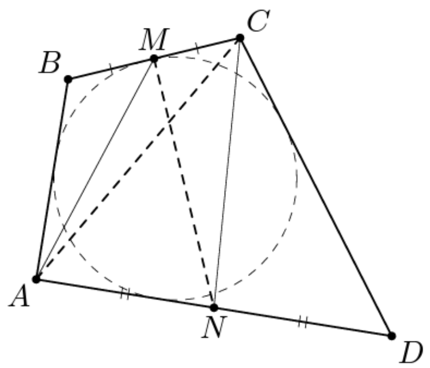
Відповідь: додатній.

Вказівка: Додавши задані в умові нерівності, отримуємо, що $-x-y > 0$. Перемноживши їх (це можна робити, оскільки їх праві частини невід'ємні) та зробивши перетворення, отримуємо, що xy(1−x−y) > 0. Вираз у дужках додатній. Тому добуток xy також додатній.

3. В опуклий чотирикутник ABCD вписано коло радіуса r. Доведіть, що діаметр кола не перевищує довжину відрізка, що сполучає середини сторін BC і AD.

Відповідь: нерівність вірна.

Вказівка: Як відомо, площа чотирикутника, в який можна вписати коло, дорівнює добутку півпериметра чотирикутника і радіуса вписаного кола, а також, що суми довжин його протилежних сторін рівні. Тому $S_{ABCD} = (AD + BC)r$. З іншого боку, якщо M і N – середини сторін BC і AD відповідно (див. рис.), то



$$\begin{aligned} S_{ABCD} &= (S_{ABM} + S_{ACM}) + (S_{ACN} + S_{DCN}) = \\ &= 2S_{ACM} + 2S_{ACN} = 2 \cdot S_{AMCN} = 2S_{AMN} + 2S_{CMN} \leqslant \\ &\leqslant MN \cdot AN + MN \cdot CM = MN \cdot (AN + CM) = \\ &= \frac{1}{2} MN \cdot (AD + BC). \end{aligned}$$

Тому $(AD + BC)r \leq \frac{1}{2} MN(AD + BC)$.

Тим самим доведено, що $2r \leq MN$.

4. Василь розклав картки з числами від 1 до 10 в ряд у деякому порядку. Потім для кожної пари сусідніх карток з числами x і y записав число $\frac{1}{x+y}$. Доведіть, що сума записаних Василем чисел більша за 0,75.

Відповідь: нерівність вірна.

Вказівка: відомо, що середнє гармонійне $\frac{n}{\frac{1}{x_1}+\cdots+\frac{1}{x_n}}$ додатніх чисел $x_1, \ldots, x_n$ не перевищує їх середнє арифметичне $\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}$.

Нехай $a_1, a_2, \dots, a_9$ – суми чисел, записаних на сусідніх картках. Середнє гармонійне чисел $\frac{1}{a_1}, \dots, \frac{1}{a_9}$ дорівнює $\frac{9}{a_1+\dots+a_9}$, а їх середнє арифметичне дорівнює $\frac{\frac{1}{a_1}+\dots+\frac{1}{a_9}}{9}$.

Тому $\frac{1}{a_1}+\dots+\frac{1}{a_9} \geq \frac{9^2}{a_1+\dots+a_9}$.

Нехай p і q – числа, записані на крайніх картках. Тоді

$$a_1+\dots+a_9+p+q = 2(1 + 2+\ldots+9 + 10) = 110.$$

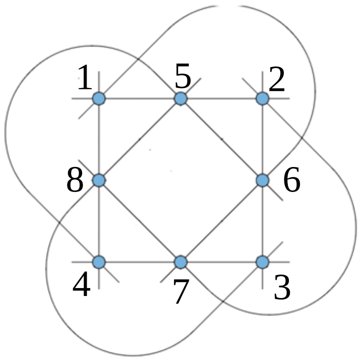
Число $a_1+\dots+a_9$ досягає свого найбільшого значення, якщо число $p+q$ досягає свого найменшого значення, що має місце при $p=1$ і $q=2$ (або навпаки). Тому $a_1+\dots+a_9 \leq 110-3 = 97$ і, як наслідок, має місце нерівність $\frac{9^2}{a_1+\dots+a_9} \geq \frac{81}{97} > \frac{3}{4}$.

Тим самим доведено, що сума записаних Василем чисел $\frac{1}{a_1}+\dots+\frac{1}{a_9}$ більша за 0,75.

5. У царя вісім синів. Щоночі цар відправляє трьох із них стерегти золоті яблука від жар-птиці. Спіймати жар-птицю царевичі не можуть, тому звинувачують у цьому один одного. Через це жодні двоє з них ще раз у варту разом не ходять. Яку найбільшу кількість ночей може тривати вартування?

Відповідь: 8 ночей.

Вказівка: кожний із братів ходить у варту не більше трьох разів. Це означає, що він має не більше трьох варт-чергувань. Тому всі брати разом мають не більше $8 \cdot 3 = 24$ варт-чергувань. Тому чергування тривають не більше 24:3=8 ночей.



Занумеруємо братів числами 1, 2, 3, …, 8 і наведемо приклад, коли відбувається вартування у кількості вісім ночей. Для цього вершини квадратів позначимо числами 1, 2, 3, …, 8, а вісім трійок братів, що ходять у варту – лініями. Такими трійками можуть бути:

125, 148, 167, 236, 278, 347, 358, 456.

Кожне завдання оцінюється 7-ма балами

м.Ужгород

Час розв'язання 4 год.

Користування калькуляторами заборонено

II етап Всеукраїнської олімпіади з математики 2021 рік

11 клас

1. Чи має від'ємні корені рівняння $x^4 - 4x^3 - 6x^2 - 3x + 9 = 0$?

Відповідь: ні.

Вказівка: Перетворимо задане рівняння у рівняння вигляду

$$(x^2 - 3)^2 - 4x^3 - 3x = 0.$$

При $x < 0$ отримане рівняння коренів не має.

2. Функція f(x) визначена для всіх дійсних чисел, причому для будь-якого x виконуються рівності f(x+2)=f(2–x) і f(x+7)=f(7–x) Доведіть, що f(x) – періодична функція.

Відповідь: f(x) – періодична функція.

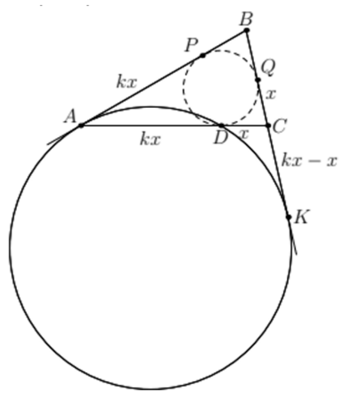
Вказівка: Враховуючи, що f(x) задана на всій множині дійсних чисел, достатньо довести, що для будь-якого дійсного числа x виконується рівність f(x+10)=f(x). Дійсно, послідовно використовуючи першу і другу рівності, які задані в умові задачі, отримуємо, що

$$f(x+10)=f((x+3)+7)= f(7–(x+3))=f(4–x)=f(2+(2–x))=f(2–(2–x))=f(x).$$

3. Коло, вписане у трикутник ABC, дотикається до сторони AC в точці D. Друге коло, що проходить через точку D, дотикається до променя BA в точці A і продовження сторони BC за точку C. Знайдіть відношення AD:DC.

Відповідь: 3:1.

Вказівка: Нехай вписане коло дотикається до сторін AB та BC у точках P та Q відповідно (див. рис.). Позначимо CD = CQ = x та AD = AP = kx. Оскільки BA = BK та BP = BQ, то PA = QK, CK = kx – x. За властивістю січних, проведених з точки C до другого кола, має місце рівність CD·CA = CK^2. Тому $x(x + kx) = (kx – x)^2$. Розкриваємо дужки і, розділивши обидві частини рівності на x^2, отримуємо рівність $k^2 = 3k$. З неї випливає, що k = 3.



4. Розв'яжіть рівняння | sinx – siny | + sinx·siny = 0.

Відповідь: x = πk, k∈Z; y = πn, n∈Z.

Вказівка: Рівняння симетричне відносно sinx і siny. Без втрати загальності, можна вважати, що sinx ≥ siny. Тому sinx – siny + sinxsiny = 0 і (1 – sinx)(1 + siny) = 1, що виконується лише при sinx = 0 та siny = 0.

Отже, x = πk, k∈Z; y = πn, n∈Z.

5. Яку найменшу кількість клітинок можна зафарбувати на дошці розміром 8x9 так, щоб серед будь-яких п'яти поспіль клітинок по горизонталі, вертикалі чи діагоналі була зафарбована клітинка?

Відповідь: 14 клітинок.

Вказівка: Виділимо на дошці 14 прямокутників розміром 1х5, які не торкаються лише двох центральних клітинок (рис. 1). У кожному з них має бути хоча б одна зафарбована клітинка. Тому зафарбованих клітинок не менше 14.

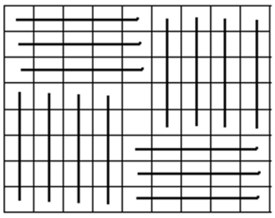


Рис. 1

Приклад, коли зафарбованих клітинок рівно 14, зображений на рисунку 2.

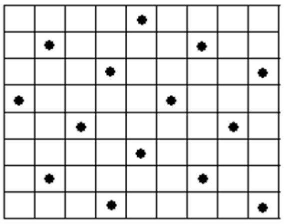


Рис. 2

Кожне завдання оцінюється 7-ма балами *м.Ужгород*

Час розв'язання 4 год.

Користування калькуляторами заборонено