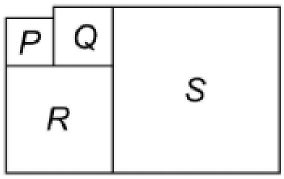
II етап Всеукраїнської олімпіади з математики 2019 рік

6 клас

1. Позначимо через $n!$ добуток всіх натуральних чисел від 1 до n. (Наприклад $4!=1\cdot2\cdot3\cdot4$). Якою останньою цифрою закінчується сума $1!+2!+3!+4!+\ldots+2019!$?

2. Яку найбільшу кількість смужок 1x5 можна вирізати з квадрата 8x8? Відповідь обґрунтуйте.

3. Фігури P, Q, R і S – квадрати (див рис.). Периметр квадрата P дорівнює 16 м, а периметр квадрата Q дорівнює 24 м. Чому дорівнює периметр квадрата S?



4. У Буратіно є чотири монети. Серед них можуть бути фальшиві. Мальвіна може за один хід вибрати будь-яку кількість з них і запитати скільки з вибраних монет є фальшивими. Буратіно завжди каже правду. За яку найменшу кількість запитань Мальвіна може визначити, які з монет є фальшивими, а які справжніми? Відповідь обґрунтуйте.

Кожне завдання оцінюється 7-ма балами *м.Ужгород*
Час розв'язання 3 год.
Користування калькуляторами заборонено

II етап Всеукраїнської олімпіади з математики 2019 рік

7 клас

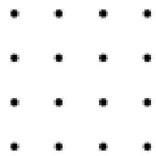
1. Посередині між пунктами А і В знаходиться кав'ярня С. З пункту А в пункт В спочатку виїхав велосипедист. Коли він був на половині шляху до кав'ярні з пункту А виїхав автомобіліст. Відомо, що коли автомобіліст доїхав до С, велосипедист ще був у дорозі між пунктами А і С, причому відстань від нього до автомобіліста в цей момент часу була вдвічі менша, ніж в момент часу, коли автомобіль тільки виїхав. Яка подія відбудеться раніше: велосипедист приїде в С чи автомобіліст – в В?

2. Маємо декілька монет, кожна вартістю ціле число золотих. Відомо, що цими монетами можна заплатити будь-яку суму від 1 до 51 золотих включно, окрім суми 50 золотих. Чи можна цими монетами заплатити суму в 100 золотих?

3. Скількома способами з цифр 1, 2, 3, 4 можна записати число кратне 6? При запису даного числа кожну цифру можна використовувати не більше одного разу.

4. У ряд записані цифри 9876543210. Поставте між ними рівно два знаки мінус так, щоб значення отриманого виразу було б найменшим (наприклад, 9876–5432–10=4434).

5. Дано квадратну решітку 4x4 (див рис). Яку найменшу кількість трикутників можна нарисувати так, щоб кожна точка опинилася на його межі? Наведіть приклад та обґрунтуйте чому менше не можна.



Кожне завдання оцінюється 7-ма балами *м.Ужгород*
Час розв'язання 4 год.
Користування калькуляторами заборонено

II етап Всеукраїнської олімпіади з математики 2019 рік

8 клас

1. Обчисліть $1^2+2^2-3^2-4^2+5^2+6^2-7^2-8^2+9^2+10^2-\ldots+2017^2+2018^2-2019^2$.

2. Двадцять шість цілих чисел $a, b, c, \ldots, x, y, z$ задовольняють рівність $(1+ab)(1+abc)\ldots(1+abc\ldots z)=0$. Доведіть, що $(a+b)(a+bc)\ldots(a+bc\ldots z)=0$.

3. У трикутнику ABC, в якому всі три сторони попарно різні, проведено бісектриси кутів A і B, які ділять його на чотирикутник і три трикутники, два з яких рівнобедрені. Знайдіть кути трикутника ABC.

4. Відомо, що рівність $(x-8)(x^2-39x+a)=(x-19)(x^2-28x+b)$ виконується при всіх значеннях x. Знайдіть числа a і b.

5. На дошці написані числа 1, 1/2, 1/3, 1/4, … , 1/100. Дозволяється витерти будь-які два числа a, b і записати $a+b+ab$. Після виконання 99 таких операцій на дошці залишиться одне число. Знайдіть це число.

Кожне завдання оцінюється 7-ма балами *м.Ужгород*
Час розв'язання 4 год.
Користування калькуляторами заборонено

II етап Всеукраїнської олімпіади з математики 2019 рік

9 клас

1. Натуральні числа x та y задовольняють рівність $x^2-3x=25y^2-15y$. Знайдіть відношення $\frac{x}{y}$.

2. Дійсні числа a і b є коренями многочлена $f(x)=x^2-19x+20$. Обчисліть значення виразу $a(a-19)(b+20/b)$.

3. У прямокутному трикутнику ABC кут B прямий. На катеті AB вибрана точка M так, що AM=BC, а на катеті BC вибрана точка N так, що CN=MB. Знайдіть гострий кут між прямими AN і CM.

4. Дільник натурального числа називається власним, якщо він відмінний від 1 та самого числа. Знайдіть всі натуральні числа, у яких різниця між сумою двох найбільших і сумою двох найменших власних дільників є простим числом.

5. Шість майже чесних піратів закопали золоті монети на безлюдному острові. Через рік прийшов перший пірат і розділив всі монети на шість рівних частин, одна монета виявилась зайвою. Тоді пірат забрав одну з частин і зайву монету та знову закопав монети. Те саме зробили всі інші пірати. Через багато років археолог знайшов ці монети. Яку найменшу кількість монет він міг знайти?

Кожне завдання оцінюється 7-ма балами *м.Ужгород*
Час розв'язання 4 год.
Користування калькуляторами заборонено

ІІ етап Всеукраїнської олімпіади з математики 2019 рік

10 клас

1. Розв'яжіть систему рівнянь
$$\begin{cases} x+y+z=3 \\ 2xy-2y-z^2=4 \end{cases}.$$

2. Знайдіть усі пари дійсних чисел $(x;y)$, які задовольняють нерівність
$$\sqrt{x^2-6x+18}\cdot\sqrt{y^2+14y+50}\le 3.$$

3. Довжини a і b двох сторін трикутника задовольняють умову $a\ge b$, а довжини відповідних їм висот дорівнюють h_a і h_b. Доведіть, що $a+h_a\ge b+h_b$. При якій умові досягається рівність?

4. На дошці записано рівняння $x^3+\square x^2+\square x+\square=0$. Два гравці по черзі вписують на вільні місця цілі числа – коефіцієнти рівняння (за один хід можна вписати тільки одне число, хід пропускати не можна). Перший гравець виграє у тому випадку, якщо всі корені рівняння – цілі числа. Чи існує виграшна стратегія хоча б у одного гравця? Відповідь обгрунтуйте.

5. Знайдіть усі такі функції $f: R\to R$, які для довільних чисел x,y задовольняють співвідношення $f(x)f(y)=f(x+y)+xy$.

Кожне завдання оцінюється 7-ма балами *м.Ужгород*
Час розв'язання 4 год.
Користування калькуляторами заборонено

II етап Всеукраїнської олімпіади з математики 2019 рік

11 клас

1. Доведіть, що коли $x - yz = y - zx = z - xy$, то $(x - y)(y - z)(z - x) = 0$.

2. Знайдіть найменше значення виразу $\sqrt{x^2 + (1 - y)^2} + \sqrt{y^2 + (1 - x)^2}$.

3. Дано трапецію у якої основи дорівнюють a і $3a$, та бічні сторони $2a$. Знайдіть відстань між центрами вписаного та описаного кіл.

4. У кожній клітинці квадратної таблиці 4х4 міститься число 0 або число 1. Поряд із таблицею записали 10 чисел за правилом: суми значень у кожному з 4 рядків, суми значень у кожному з 4 стовпчиків і суми чисел на кожній із 2 великих діагоналей (тих діагоналей, що містять по чотири клітинки). Доведіть, що серед отриманих десяти чисел є принаймні три однакових.

5. Знайдіть усі такі функції $f : Z \to Z$, що для довільних цілих чисел x, y виконується рівність $f(x + f(x + 2y)) = f(2x) + f(2y)$ і $f(0) = 2$.

Кожне завдання оцінюється 7-ма балами *м.Ужгород*
Час розв'язання 4 год.
Користування калькуляторами заборонено