II етап Всеукраїнської олімпіади з математики 2019 рік

6 клас

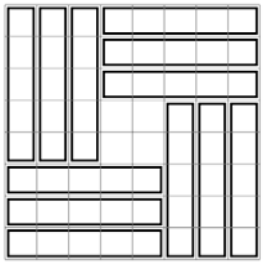
1. Позначимо через $n!$ добуток всіх натуральних чисел від 1 до n. (Наприклад $4!=1\cdot2\cdot3\cdot4$). Якою останньою цифрою закінчується сума $1!+2!+3!+4!+\ldots+2019!$?

Вказівка:

Відмітимо, що 1! закінчується цифрою 1, 2! закінчується цифрою 2, 3! закінчується цифрою 6, 4! закінчується цифрою 4, всі решта чисел 5!, …, 2019! закінчуються нулями. Отже, сума закінчується цифрою 3.

Відповідь: 3.

2. Яку найбільшу кількість смужок 1x5 можна вирізати з квадрата 8x8? Відповідь обґрунтуйте.

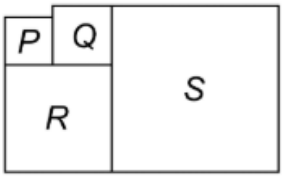


Вказівка:

Відмітимо, що більше 12 фігурок з 5 клітинок вирізати не можна (оскільки $64=12\cdot5+4$). Тому достатньо навести приклад з 12 смужок.

Відповідь: 12.

3. Фігури P, Q, R і S – квадрати (див рис.). Периметр квадрата P дорівнює 16 м, а периметр квадрата Q дорівнює 24 м. Чому дорівнює периметр квадрата S?



Вказівка:

Сторона квадрата P дорівнює 16:4=4 м, а квадрата Q – 24:4=6 м. Тому сторона квадрата R дорівнює 6+4=10 м. Отже, сторона квадрата S дорівнює 6+10=16 м.

Відповідь: 64 м.

4. У Буратіно є чотири монети. Серед них можуть бути фальшиві. Мальвіна може за один хід вибрати будь-яку кількість з них і запитати скільки з вибраних монет є фальшивими. Буратіно завжди каже правду. За яку найменшу кількість запитань Мальвіна може визначити, які з монет є фальшивими, а які справжніми? Відповідь обґрунтуйте.

Вказівка:

Якщо Мальвіна спитає про одну монету, то залишаться три монети фальшивість яких другим запитанням встановити не вдасться. Якщо про дві або про три монети, то отримавши відповідь один Мальвіна теж не зможе встановити фальшивість всіх монет. Якщо Мальвіна першим запитанням спитає про чотири монети, то навіть знаючи кількість фальшивих монет, вона не зможе другим запитанням встановити, які саме з монет є фальшивими, а які є справжніми. Отже, двох запитань недостатньо.

Виявляється, що за три запитання Мальвіна зможе встановити фальшивість всіх монет. Для доведення цього занумеруємо монети 1,2,3,4. Відмітимо, що якщо при запитанні про дві монети Мальвіна отримує відповідь нуль або два, то тоді про ці дві монети все відомо, а про ті дві монети, що залишилися за два запитання теж можна все дізнатися. Тому достатньо розглянути випадок, коли при запитанні про фальшивість монет 1,2 та 1,3 отримано відповіді один. В такому разі монети 2 і 3 мають однакову фальшивість. Тому третім запитанням Мальвіна запитує про фальшивість монет 2,3,4.

Якщо відповідь нуль, то 1 монета фальшива, а 2,3,4 справжні.
Якщо відповідь один, то 4 монета фальшива, а 2,3 справжні і 1 монета фальшива.
Якщо відповідь два, то 2 і 3 монети фальшиві, а 4 і 1 є справжніми.
Якщо відповідь три, то 2,3,4 монети фальшиві, а 1 справжня.

Відповідь: 3.

Кожне завдання оцінюється 7-ма балами *м.Ужгород*
Час розв'язання 3 год.
Користування калькуляторами заборонено

II етап Всеукраїнської олімпіади з математики 2019 рік

7 клас

1. Посередині між пунктами А і В знаходиться кав'ярня С. З пункту А в пункт В спочатку виїхав велосипедист. Коли він був на половині шляху до кав'ярні з пункту А виїхав автомобіліст. Відомо, що коли автомобіліст доїхав до С, велосипедист ще був у дорозі між пунктами А і С, причому відстань від нього до автомобіліста в цей момент часу була вдвічі менша, ніж в момент часу, коли автомобіль тільки виїхав. Яка подія відбудеться раніше: велосипедист приїде в С чи автомобіліст – в В?

Вказівка:

Приймемо відстань АС за x. Автомобіліст виїхав з пункту А тоді, коли велосипедист був на відстані $\frac{1}{2}x$. Коли автомобіліст добрався до пункту С, то велосипедист був в точці $\frac{3}{4}x$. Отже, швидкість автомобіля в чотири рази більша за швидкість велосипедиста. Таким чином вони доберуться в дані пункти одночасно.

Відповідь: одночасно.

2. Маємо декілька монет, кожна вартістю ціле число золотих. Відомо, що цими монетами можна заплатити будь-яку суму від 1 до 51 золотих включно, окрім суми 50 золотих. Чи можна цими монетами заплатити суму в 100 золотих?

Вказівка:

Так можна. Візьмемо набір монет А якими можна заплатити 51 золотих. Нехай найменша монета в цьому наборі x золотих. Якщо $x \neq 51$, то існує набір монет В якими можна заплатити $x - 1$ золотих. У наборі В всі монети менші за x, а тому відмінні від монет набору А. Забравши з А монету x та додавши замість неї набір монет з В якими можна заплатити $x - 1$ золотих, отримаємо набір монет, якими можна заплатити 50 золотих, що протирічить умові задачі. Отже, набір А складається з однієї монети в 51 золотих. Додавши до неї набір монет якими можна заплатити 49 золотих отримаємо набір монет, якими можна заплатити рівно 100 золотих.

Відповідь: можна.

3. Скількома способами з цифр 1, 2, 3, 4 можна записати число кратне 6? При запису даного числа кожну цифру можна використовувати не більше одного разу.

Вказівка:

Число ділиться на 6 тоді і тільки тоді, коли воно ділиться на 2 і на 3. Отже, остання цифра 2 або 4, а сума цифр ділиться на 3. Це можливо лише для чисел: 12, 132, 312, 24, 42, 234, 324, 342, 432.

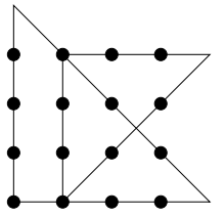
Відповідь: 9.

4. У ряд записані цифри 9876543210. Поставте між ними рівно два знаки мінус так, щоб значення отриманого виразу було б найменшим (наприклад, 9876–5432–10=4434).

Відповідь: 9–87654321–0= –87654312.

5. Дано квадратну решітку 4х4 (див рис). Яку найменшу кількість трикутників можна нарисувати так, щоб кожна точка решітки опинилася на його межі? Наведіть приклад та обґрунтуйте чому менше не можна.

Вказівка:



Два трикутники можна нарисувати (див рис.). Доведемо, що менше трикутників нарисувати не можна. Припустимо, що всі точки лежать на межі одного трикутника. Тоді з чотирьох точок кожного ряду принаймні дві лежать на одній стороні трикутника. Це означає, що точки кожного ряду лежать на одній стороні трикутника. Це неможливо, оскільки сторін три, а рядів чотири. Протиріччя.

Відповідь: 2.

Кожне завдання оцінюється 7-ма балами *м.Ужгород*
Час розв'язання 4 год.
Користування калькуляторами заборонено

II етап Всеукраїнської олімпіади з математики 2019 рік

8 клас

1. Обчисліть $1^2+2^2-3^2-4^2+5^2+6^2-7^2-8^2+9^2+10^2-\ldots+2017^2+2018^2-2019^2$.

Вказівка:

Відмітимо, що для будь-якого x вірно $x^2-(x+1)^2-(x+2)^2+(x+3)^2=4$. Тому дана сума рівна $1+504\cdot4+2018^2-2019^2=-2020$.

Відповідь: –2020.

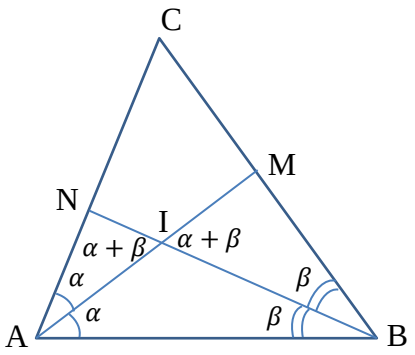
2. Двадцять шість цілих чисел $a, b, c, \ldots, x, y, z$ задовольняють рівність $(1+ab)(1+abc)\ldots(1+abc\ldots z)=0$. Доведіть, що $(a+b)(a+bc)\ldots(a+bc\ldots z)=0$.

Вказівка:

Оскільки перший добуток дорівнює нулю, то один з множників дорівнює нулю. Отже, добуток деяких цілих чисел дорівнює –1. Тому існує набір чисел $a, b, c, \ldots, d$ такий, що складається з ±1, причому –1 входить в нього непарну кількість разів. Якщо $a=-1$, то $bc\ldots d=1$, а якщо $a=1$, то $bc\ldots d=-1$. Тоді $a+bc\ldots d=0$ і $(a+b)(a+bc)\ldots(a+bc\ldots z)=0$.

3. У трикутнику ABC, в якому всі три сторони попарно різні, проведено бісектриси кутів A і B, які ділять його на чотирикутник і три трикутники, два з яких рівнобедрені. Знайдіть кути трикутника ABC.

Вказівка:



Нехай AM, BN – бісектриси кутів A і B відповідно. За умовою $\alpha \neq \beta$, а кут $180^0 - 2\alpha - 2\beta > 0$ і відмінний від кутів 2α і 2β. Тому $\alpha + \beta < 90^0$ і кути $2\alpha + \beta$, $\alpha + 2\beta$ відмінні від 90^0. Оскільки $\angle AIB$ – тупий і $\alpha \neq \beta$, то ΔAIB не є рівнобедреним. Тому ΔAIN і ΔBIM – рівнобедрені.

Оскільки $\angle AIN = \angle BIM = \alpha + \beta$ відмінний від α і β, то $180^0 - (\alpha + \alpha + \beta) = \left[\begin{array}{l}\alpha \\ \alpha + \beta\end{array}\right.$ або

$180^0 - (\beta + \alpha + \beta) = \left[\begin{array}{l}\beta \\ \alpha + \beta\end{array}\right.$.

Виникають 4 випадки. Випадки $180^0 = 3\alpha + \beta = \alpha + 3\beta$ і $180^0 = 3\alpha + 2\beta = 3\beta + 2\alpha$ відпадають через те, що $\alpha \neq \beta$. Тому $180^0 = 3\alpha + \beta = 2\alpha + 3\beta$ або $180^0 = 3\alpha + 2\beta = \alpha + 3\beta$. Значить $\alpha = 2\beta$, $\beta = \frac{\pi}{7}$, $\alpha = \frac{2\pi}{7}$ або $\beta = 2\alpha$, $\alpha = \frac{\pi}{7}$, $\beta = \frac{2\pi}{7}$ відповідно. Тому $\angle A = \frac{4\pi}{7}$, $\angle B = \frac{2\pi}{7}$ або $\angle A = \frac{2\pi}{7}$, $\angle B = \frac{4\pi}{7}$ відповідно.

Відповідь: $\frac{\pi}{7}$, $\frac{2\pi}{7}$, $\frac{4\pi}{7}$.

4. Відомо, що рівність $(x-8)(x^2-39x+a) = (x-19)(x^2-28x+b)$ виконується при всіх значеннях x. Знайдіть числа a і b.

Вказівка: Якщо підставити x=0, а потім підставити x=1, то отримаємо лінійну систему двох рівнянь з двома невідомими a і b. З неї отримуємо, що a=380, а b=160.

Відповідь: a=380, b=160.

5. На дошці написані числа 1, 1/2, 1/3, 1/4, … , 1/100. Дозволяється витерти будь-які два числа a, b і записати $a+b+ab$. Після виконання 99 таких операцій на дошці залишиться одне число. Знайдіть це число.

Вказівка:

Правило дії над числами a і b можна переформулювати на правило дії над числами a+1 і b+1. Тоді числа a+1 і b+1 замінюються на $(a+1)(b+1) = ab+a+b+1$. Замінимо написані на дошці числа на числа 1+1, 1+1/2, 1+1/3, 1+1/4, … , 1+1/100. Після виконання всіх множень на дошці залишиться число 101. Цей добуток більший від шуканого на 1. Тому шукане число дорівнює (1+1)(1+1/2)(1+1/3)…(1+1/100)=101–1=100.

Відповідь: 100.

Кожне завдання оцінюється 7-ма балами *м.Ужгород*
Час розв'язання 4 год.
Користування калькуляторами заборонено

II етап Всеукраїнської олімпіади з математики 2019 рік

9 клас

1. Натуральні числа x та y задовольняють рівність $x^2–3x=25y^2–15y$. Знайдіть відношення $\frac{x}{y}$.

Вказівка:

Дану рівність можна переписати у вигляді $(5y–x)(5y+x–3)=0$. Оскільки x та y натуральні числа, то $5y+x–3\geq3$. Тому $5y=x$. Отже, $\frac{x}{y}=5$.

Відповідь: 5.

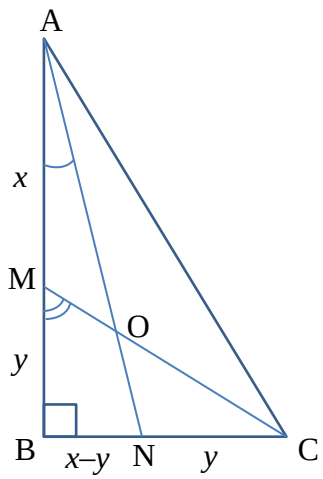
2. Дійсні числа a і b є коренями многочлена $f(x)=x^2–19x+20$. Обчисліть значення виразу $a(a–19)(b+20/b)$.

Вказівка:

Оскільки $f(a)=a^2–19a+20=0$ і $f(b)=b^2–19b+20=0$,
то $a^2–19a= –20$ і $b^2+20=19b$, $b+20/b=19$.
Отже, $a(a–19)(b+20/b)= –20\cdot19= –380$.

Відповідь: –380.

3. У прямокутному трикутнику ABC кут B прямий. На катеті AB вибрана точка M так, що AM=BC, а на катеті BC вибрана точка N так, що CN=MB. Знайдіть гострий кут між прямими AN і CM.



Вказівка:

1 спосіб

Позначимо $x = AM = BC$, $y = CN = MB$.

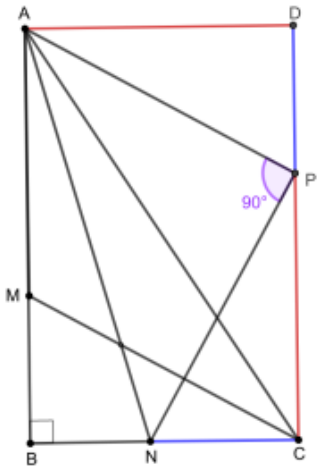
Нехай $\alpha = \angle BAC$, $\beta = \angle BMC$, O – точка перетину прямих AN і CM.

$tg\alpha = \frac{x-y}{x+y}$, $tg\beta = \frac{x}{y}$.

Тому $\angle AOM = \beta - \alpha$.

$tg(\beta - \alpha) = \frac{tg\beta - tg\alpha}{1+tg\alpha tg\beta} = 1 \Rightarrow \beta - \alpha = 45^0$.

Відповідь: 45^0.



2 спосіб

Добудуємо трикутник ABC до прямокутника ABCD і виберемо на його стороні CD точку P так, що AP паралельно CM.

Тоді PC=AD, DP=CN і прямокутні трикутники ADP і CPN рівні, причому ∠DAP=∠CPN.

Тому ∠APD+∠CPN=90° і ∠APN=90°, тобто APN – рівнобедрений прямокутний трикутник.

Тому ∠PAN=45°.

Оскільки AP і CM паралельні, то кут між прямими AN і CM дорівнює 45°.

Відповідь: 45^0.

4. Дільник натурального числа називається власним, якщо він відмінний від 1 та самого числа. Знайдіть всі натуральні числа, у яких різниця між сумою двох найбільших і сумою двох найменших власних дільників є простим числом.

Вказівка:

Нехай n – натуральне число, яке має два найменші власні дільники, p – найменше просте число, яке ділить n. Тоді $\frac{n}{p}$ – найбільший власний дільник n.

Нехай q – найменший простий дільник числа $\frac{n}{p}$. Ясно, що q ділить n і $p \leq q$.

Якщо p^2 ділить n, то p ділить $\frac{n}{p}$ і $q \leq p$. Тому $p = q$, p і p^2 – найменші власні дільники числа n, а $\frac{n}{p}$ і $\frac{n}{p^2}$ – найбільші власні дільники числа n. Оскільки $\frac{n}{p} + \frac{n}{p^2} - p - p^2 = (p+1)\left(\frac{n}{p^2} - p\right)$ – просте число, то $p + 1$ – просте число, а $\frac{n}{p^2} - p = 1$. Значить $p = 2$, $n = 12$.

Якщо p^2 не ділить число n, то p, q – найменші власні дільники числа n, а $\frac{n}{p}$ і $\frac{n}{q}$ – найбільші власні дільники числа n. Тому $\frac{n}{p} + \frac{n}{q} - p - q = (p+q)\left(\frac{n}{pq} - 1\right)$ – просте число, $p + q$ – просте число, а $\frac{n}{pq} - 1 = 1$ і $n = 2pq$. Сума двох простих чисел може бути простим числом лише при $p = 2$. Але тоді p^2 ділить n, що протирічить припущенню.

Відповідь: 12.

5. Шість майже чесних піратів закопали золоті монети на безлюдному острові. Через рік прийшов перший пірат і розділив всі монети на шість рівних частин, одна монета виявилась зайвою. Тоді пірат забрав одну з частин і зайву монету та знову закопав монети. Те саме зробили всі інші пірати. Через багато років археолог знайшов ці монети. Яку найменшу кількість монет він міг знайти?

Вказівка:

Відмітимо, що після кожного закопування монет окремо взятими піратами число монет ділиться на 5. Нехай археолог знайшов x монет. Тоді $x=5y$. Значить шостий пірат знайшов $6y+1$ монет, число яких також ділиться на 5. Тому $y+1$ ділиться на 5. Нехай $y+1=5z$. Тоді $x = 5(5z-1)$. Якщо п'ятий пірат знайшов $6t+1$ монет, то $6t+1$, а значить і $t+1$ ділиться на 5. Нехай $t+1=5l$. Тоді $t-y=5(l-z)$. Оскільки п'ятий пірат закопав, а шостий пірат знайшов ті ж самі монети, то $5t=6y+1$. Тому $x=5y=5(5(t-y)-1)= 5(5^2(l-z)-1)$. Продовживши міркування до першого пірата отримаємо $x = 5^6 t - 5$. Найменше можливе значення $5^6-5=15620$.

Відповідь: 15620.

Кожне завдання оцінюється 7-ма балами *м.Ужгород*
Час розв'язання 4 год.
Користування калькуляторами заборонено

II етап Всеукраїнської олімпіади з математики 2019 рік

10 клас

1. Розв'яжіть систему рівнянь

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2xy - 2y - z^2 = 4 \end{cases}.$$

Вказівка:

Виразіть x через y і z з першого рівняння і підставте його в друге рівняння. Після цього, зведіть рівняння до вигляду $(y-2)^2+(y+z)^2=0$.

Відповідь. $(3;2;-2)$.

2. Знайдіть усі пари дійсних чисел $(x;y)$, які задовольняють нерівність

$$\sqrt{x^2-6x+18}\cdot\sqrt{y^2+14y+50}\le 3.$$

Вказівка.

Запишіть вираз, який стоїть у лівій частині рівності у вигляді

$\sqrt{(x-3)^2+9}\cdot\sqrt{(y+7)^2+1}$. Оскільки $(x-3)^2+9\ge 9$, а $(y+7)^2+1\ge 1$, то $\sqrt{(x-3)^2+9}\cdot\sqrt{(y+7)^2+1}\ge 3$. Тому рівність може виконуватися лише за умови $x-3=0, y+7=0$.

Відповідь. $(3;-7)$.

3. Довжини a і b двох сторін трикутника задовольняють умову $a\ge b$, а довжини відповідних їм висот дорівнюють h_a і h_b. Доведіть, що $a+h_a\ge b+h_b$. При якій умові досягається рівність?

Вказівка: Відповідно до умови $a\ge b$ розглянемо два випадки.

1. $a>b$. Оскільки $2S=absin\gamma\le ab$, де S – площа трикутника, γ – кут між сторонами a і b, то

$$(a+h_a)-(b+h_b)=\left(a+\frac{2S}{a}\right)-\left(b+\frac{2S}{b}\right)=(a-b)\left(1-\frac{2S}{ab}\right)\ge 0.$$

Знак рівності досягається при $2S=ab$ (в цьому випадку кут між сторонами a і b дорівнює 90^0).

2. $a=b$. Досягається у рівнобедреному або рівносторонньому трикутниках . Висоти h_a і h_b рівні, тому $a+h_a=b+h_b$.

4. На дошці записано рівняння $x^3+\square x^2+\square x+\square=0$. Два гравці по черзі вписують на вільні місця цілі числа – коефіцієнти рівняння (за один хід можна вписати тільки одне число, хід пропускати не можна). Перший гравець виграє у тому випадку, якщо всі корені рівняння – цілі числа. Чи існує виграшна стратегія хоча б у одного гравця? Відповідь обгрунтуйте.

Вказівка:

Перший гравець на останнє пусте місце ставить число 0. Після ходу другого гравця, який записує на одне з вільних місць ціле число a, перший гравець на вільне місце ставить ціле число b, щоб $a+b+1=0$. Тоді рівняння має всі цілі корені. Адже, один з них 0, а другий 1. За теоремою Вієта і третій корінь є цілим числом. Перший гравець має виграшну стратегію.

Відповідь: перший гравець має виграшну стратегію.

5. Знайдіть усі такі функції $f: R\to R$, які для довільних чисел x,y задовольняють співвідношення $f(x)f(y)=f(x+y)+xy$.

Вказівка:

Підставимо в задану рівність x=y=1. Отримаємо $f^2(1) = f(2) + 1$. Тому існує $a\epsilon\{1; 2\}$ таке, що $f\ (a\ ) \neq 0$.

Підставимо в задану рівність $x = a,\ y = 0$. Отримаємо $f\ (a\ )f\ (0\ ) = f\ (a\ )$. Тому $f\ (0\ ) = 1$.

Підставимо в задану рівність $x = 1,\ y = -1$. Отримаємо $f\ (1\ )f\ (-1\ ) = 0$. Тому $f\ (1) = 0$ або $f\ (-1) = 0$.

Якщо $f\ (1) = 0$, то для будь-якого x і $y = 1$ виконується рівність $f\ (x + 1) = -x$. Якщо позначимо $t = x + 1$, то $x = t - 1$ і $f(t) = 1 - t$ буде шуканою функцією. Перевірка показує, що вона задовольняє умову задачі.

Якщо $f\ (-1) = 0$, то для будь-якого x і $y = -1$ виконується рівність $f\ (x - 1) = x$. Якщо позначимо $t = x - 1$, то $x = t + 1$ і $f(t) = 1 + t$ буде шуканою функцією. Перевірка показує, що вона задовольняє умову задачі.

Відповідь: $f\ (t) = 1 - t$ і $f\ (t) = 1 + t$.

Кожне завдання оцінюється 7-ма балами *м.Ужгород*
Час розв'язання 4 год.
Користування калькуляторами заборонено

II етап Всеукраїнської олімпіади з математики 2019 рік
11 клас

1. Доведіть, що коли $x - yz = y - zx = z - xy$, то $(x - y)(y - z)(z - x) = 0$.

Вказівка:

З того, що $x - yz = y - zx$ випливає, що $(x - y)(1 + z) = 0$. Звідси $x - y = 0$ або $z = -1$. Якщо $x - y = 0$, то рівність доведена. Аналогічно доводиться, що числа x, y, z попарно рівні або всі вони рівні -1, що також доводить задану рівність.

2. Знайдіть найменше значення виразу $\sqrt{x^2 + (1 - y)^2} + \sqrt{y^2 + (1 - x)^2}$.

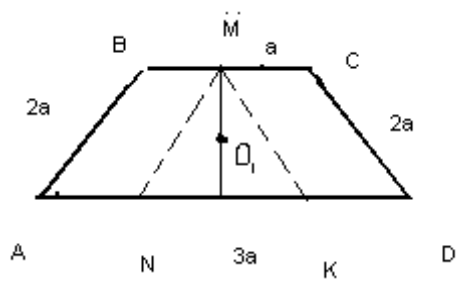
Вказівка:

Даний вираз дорівнює сумі довжин векторів $\vec{a} = (x; 1 - y)$ та $\vec{b} = (1 - x; y)$, яка не менша за довжину вектора $\vec{a} + \vec{b} = (1; 1)$, що дорівнює $\sqrt{2}$. Рівність досягається, якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні, тобто при $x + y = 1$.

Відповідь: $\sqrt{2}$.

3. Дано трапецію у якої основи дорівнюють a і $3a$, та бічні сторони $2a$. Знайдіть відстань між центрами вписаного та описаного кіл.

Вказівка:



Оскільки трапеція рівнобічна, то навколо неї можна описати коло.

Так як суми протилежних сторін рівні, то в трапецію можна вписати коло.

Проведемо $MN \parallel AB$, $MK \parallel CD$. Очевидно, що ΔMNK −рівносторонній із стороною $2a$.

Нехай O_1 − центр вписаного кола. Тоді $MO_1 = r = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

За теоремою косинусів $AC^2 = AD^2 + CD^2 - 2AC \cdot CD \cdot \cos 60^0$, $AC^2 = 9a^2 + 4a^2 - 6a^2 = 7a^2$.

Тому $AC = a\sqrt{7}$.

За теоремою синусів $R = \dfrac{a\sqrt{7}}{2\sin 60^0} = a\sqrt{\dfrac{7}{3}}$.

Нехай O_2 − центр описаного кола. Ясно, що O_2 знаходиться на промені MO_1.

Тоді $O_2C = R$; $MC = \dfrac{a}{2}$, $MO_2 = \sqrt{\dfrac{7}{3}a^2 - \dfrac{a^2}{4}} = \dfrac{5}{2\sqrt{3}}a > \dfrac{a\sqrt{3}}{2} = MO_1$.

Тому $O_1O_2 = MO_2 - MO_1 = \frac{5\sqrt{3}}{6}a - \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Відповідь: $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

4. У кожній клітинці квадратної таблиці 4x4 міститься число 0 або число 1. Поряд із таблицею записали 10 чисел за правилом: суми значень у кожному з 4 рядків, суми значень у кожному з 4 стовпчиків і суми чисел на кожній із 2 великих діагоналей (тих діагоналей, що містять по чотири клітинки). Доведіть, що серед отриманих десяти чисел є принаймні три однакових.

Вказівка:

У кожному рядку, стовпчику та на кожній діагоналі містяться чотири числа, кожне з яких дорівнює 0 або 1. Тому кожна записана сума може бути одним із п'яти чисел: 0, 1, 2, 3, 4. Якби серед 10 сум не було трьох однакових, то це означало б, що кожне з п'яти можливих значень зустрічається рівно два рази. Доведемо, що це неможливо. Розглянемо лінію, сума чисел на якій дорівнює 0. Така лінія складається з нулів. Якщо це діагональ, то в такому разі в кожному рядку і у кожному стовпчику міститься хоча б один нуль. Тому не має двох ліній із сумою 4. Якщо лінія із сумою 0 — рядок, то в кожному стовпчику і на кожній діагоналі є принаймні один нуль. Тому дві лінії із сумою чисел 4 — теж рядки. У такому випадку друга лінія із сумою 0 теж є рядком. У такому разі у таблиці є по два рядки із сумами 0 та 4. Тому сума чисел у кожному з чотирьох стовпчиків дорівнює 2, а це суперечить припущенню, що кожне значення від 0 до 4 зустрічається серед сум рівно два рази.

5. Знайдіть усі такі функції $f : Z \to Z$, що для довільних цілих чисел x,y виконується рівність $f(x + f(x + 2y)) = f(2x) + f(2y)$ і $f(0) = 2$.

Вказівка:

Підставимо в задану рівність $x = 0$. Тоді $f\big(f(2y)\big) = f(2y) + 2$. Нехай $t = 2y$.

Тоді $f(t) = t + 2$ (1)

Оскільки $f(0) = 2$, то $f(2) = 4$, $f(4) = 6$, … . Це означає, що (1) вірна для всіх невід'ємних парних чисел t.

Підставимо в задану рівність $y = -\frac{x}{2}$, де x – довільне невід'ємне парне число. Отримаємо, що $f(x + 2) = 2x + 2 + f(-x)$ і $f(-x) = -x + 2$. Це означає, що (1) вірна для всіх цілих парних чисел t.

Підставимо в задану рівність $y = 0$. Тоді $f\big(x + f(x)\big) = 2x + 4$.

Нехай x – довільне непарне число. Якщо $f(x)$ – непарне число, то $x + f(x)$ – парне число і $f\big(x + f(x)\big) = x + f(x) + 2$. Тому $f(x) = x + 2$.

Якщо $f(x)$ – парне число, то підставимо в задану рівність $f\big(k + f(k + y)\big) = f(2k) + f(2y) = 2k + 2y + 4$ значення $k = x - f(x)$, $y = \frac{f(x)}{2}$. Оскільки $k + f(k + 2y) = x$, то $f(x) = 2x - 2f(x) + f(x) + 4$ і $f(x) = x + 2$ – непарне число. Протиріччя.

Відповідь: $f(t) = t + 2$.

Кожне завдання оцінюється 7-ма балами *м.Ужгород*
Час розв'язання 4 год.
Користування калькуляторами заборонено